TD 1

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Montrer que pour tout diviseur d de n, le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ admet un unique sous-groupe d'ordre d.
2. Réciproquement, soit G un groupe fini d'ordre n. On suppose que pour tout diviseur d de n, le groupe G a au plus un sous-groupe cyclique d'ordre d. Montrer que G est cyclique.
3. *Application.* Soit K un corps. Montrer que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif K^* est cyclique.

Exercice 2. Combien de relations d'équivalence peut-on définir sur $\{1, 2, 3, 4\}$?

Exercice 3. Soit E un espace topologique.

Si x et y sont deux éléments de E, on appelle *chemin* d'origine x et d'extrémité y toute application continue $\gamma : [0; 1] \to E$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Soient x et y deux éléments de E. On dit que x est *relié* à y s'il existe un chemin d'origine x et d'extrémité y.

1. Montrer que la relation « x est relié à y » est une relation d'équivalence sur E.
2. Quelles sont les classes d'équivalence ?

Exercice 4. Considérons deux ensembles E et F. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que la relation sur E définie par $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence.
2. Soit π l'application canonique de E dans $X = E/\sim$. Montrer qu'il existe une unique application $\overline{f} : X \to F$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi$.
3. Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On suppose $f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)$. Alors il existe une application $h : F \to G$ vérifiant $g = h \circ f$.
4. Montrer que $\overline{f}$ est injective.

Exercice 5. Pour tout groupe G, vérifier que la relation de conjugaison est une relation d'équivalence. Montrer que deux éléments conjugués ont même ordre. Que dire de la réciproque ? (voir exercice 8, question 8)

Exercice 6. On considère le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

1. Donner une partie génératrice de $\mathfrak{S}_3$.
2. Déterminer la liste des sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$.
3. Parmi les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, lesquels sont distingués ? Trouver un sous-groupe H de $\mathfrak{S}_3$ et des éléments $x, y \in \mathfrak{S}_3$ tels que $xHyH \neq xyH$.
4. Montrer que le groupe des automorphismes de $V_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 7. On s'intéresse aux sous-groupes de $\mathfrak{S}_4$.

1. (a) Montrer que le sous-ensemble $H = \{e, \alpha, \beta, \delta\}$ avec $\alpha = (12)(34)$, $\beta = (13)(24)$ et $\delta = (14)(23)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ isomorphe au groupe V_4.
   (b) Calculer les conjugués de α, β et δ par le cycle $\gamma = (123)$ et montrer que H est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_4$.
2. Faire la liste de tous les sous-groupes de $\mathfrak{S}_4$. Lesquels sont distingués ?
3. De même, déterminer les sous-groupes du groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ et indiquer ceux qui sont distingués dans $\mathfrak{A}_4$.
4. Montrer que le sous-groupe engendré par α est d'ordre 2, distingué dans H mais pas dans $\mathfrak{S}_4$.
5. Montrer que $\mathfrak{S}_4$ est engendré par α, β, γ et $\tau = (12)$.

Exercice 8. On note D_4 le groupe des isométries d'un carré du plan.

1. Donner le cardinal de D_4. Décrire ses éléments et indiquer ceux conjugués.
2. Donner un ensemble générateur à deux éléments de D_4.
3. Quels sont les sous-groupes de D_4 ?
4. Montrer que toute numérotation des sommets du carré permet de définir un morphisme de groupes $D_4 \to \mathfrak{S}_4$.
5. Quels sont les sous-groupes de $\mathfrak{S}_4$ qui apparaissent comme image de D_4 par un des morphismes précédents ? Montrer qu'ils sont tous conjugués.
6. Trouver un sous-groupe de D_4 de cardinal 4 dont l'image dans $\mathfrak{S}_4$ ne dépend pas du choix de la numérotation.
7. Fixons une numérotation du carré et regardons D_4 comme un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ par cette numérotation. Existe-t-il des éléments de D_4 qui sont conjugués dans $\mathfrak{S}_4$ mais pas dans D_4 ?
8. Dans D_4, est-ce que deux éléments de même ordre sont conjugués ?

Exercice 9. Soit H_8 le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

1. Montrer que H_8 est un groupe d'ordre 8 non commutatif.
2. Déterminer les sous-groupes de H_8. Lesquels sont cycliques ? Distingués dans H_8 ?
3. Déterminer le centre Z de H_8, ainsi que le quotient H_8/Z.