TD 3

Exercice 1. Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le seul groupe fini ayant exactement deux classes de conjugaison.

Exercice 2. Soit p un nombre premier.

1. Montrer que tout groupe d'ordre p^2 est abélien. (*Indication :* On pourra en fait montrer que si le quotient $G/Z(G)$ d'un groupe par son centre est monogène, le groupe est abélien.)
2. Montrer qu'il existe un groupe non abélien d'ordre p^3.

Exercice 3. Déterminer le centre du groupe unipotent $\mathrm{U}_n(\mathbb{F}_p)$.

Exercice 4. Soit G un p-groupe.

1. Soit $H \neq \{1\}$ un sous-groupe distingué de G. Montrer que $Z(G) \cap H \neq \{1\}$, où $Z(G)$ désigne le centre de G.
2. Soit $K \neq G$ un sous-groupe de G et N son normalisateur. Montrer que $N \neq K$. (*Indication* : On pourra s'intéresser à l'ensemble des conjugués de K différents de K).
3. Montrer que G admet des sous-groupes de tout ordre divisant $|G|$.

Exercice 5.

1. Soit G un groupe fini. L'action par multiplication de G sur lui-même définit un morphisme $\phi : G \to \mathrm{Bij}(G)$. Soit $g \in G$. Quelle est la décomposition en cycles disjoints de $\phi(g)$?
2. On suppose que l'ordre de G est $2m$, avec m un entier impair. Montrer que G contient un sous-groupe distingué d'ordre m.

Exercice 6. Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par une de ses classes de conjugaison.
2. En déduire que si $\mathfrak{S}_n$ se surjecte sur un groupe abélien, ce dernier est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou au groupe trivial.
3. Montrer que, pour $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$.
4. En déduire que si $\mathfrak{A}_n$ se surjecte sur un groupe abélien ($n \geq 5$), ce dernier est trivial.
5. Montrer que si un p-groupe est engendré par une de ses classes de conjugaison, il est cyclique. (*Indication :* On pourra montrer que dans un p-groupe, tout sous-groupe non trivial maximal est distingué).

Exercice 7. Montrer qu'il existe, à isomorphisme près, deux groupes d'ordre 6. (*Indication :* On pourra faire agir le groupe sur l'ensemble des classes à gauche d'un sous-groupe d'ordre 2.)

Exercice 8. Soit G un groupe fini et soit H un sous-groupe de G.

1. Montrer que, si l'ordre de G ne divise pas $[G : H]!$, alors H contient un sous-groupe non trivial qui est distingué dans G.
2. Soit p le plus petit facteur premier divisant l'ordre de G. Montrer que tout sous-groupe de G d'indice p est distingué dans G.

Exercice 9. On note $\mathbb{RP}^1$ l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. On l'appelle *droite projective réelle*.

1. Montrer que le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est le sous-groupe $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) = \{\lambda \,\mathrm{id} \mid \lambda \neq 0\}$ des matrices scalaires non nulles.
2. Montrer que l'action linéaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$ permet de définir une action fidèle de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ sur $\mathbb{RP}^1$, appelée *action projective*.
3. Montrer que cette action est *exactement 3-transitive*, c'est-à-dire que pour tous triplets (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) d'éléments distincts de $\mathbb{RP}^1$, il existe un unique élément $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ tel que $\forall 1 \leq i \leq 3, g \cdot x_i = y_i$.

Exercice 10. Soit G un groupe fini d'ordre n. On décompose n sous la forme $n = p^\alpha m$, où m et p sont premiers entre eux. On appelle p-sous-groupe de Sylow de G les sous-groupes de G de cardinal p^α, et on note $\mathrm{Syl}_p(G)$ leur ensemble. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant, dû à L. Sylow.

Théorème de Sylow. Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant $|G|$; on écrit $n = p^\alpha m$. Le nombre $|\mathrm{Syl}_p(G)|$ de p-sous-groupes de Sylow de G est congru à 1 modulo p et divise m. En outre, tout p-sous-groupe de G est contenu dans un p-sous-groupe de Sylow et tous les p-sous-groupes de Sylow de G sont conjugués.

On fait agir G par multiplication à gauche sur l'ensemble Ω des parties à p^α éléments de G.

1. Montrer que, si $E \in \Omega$, $|\operatorname{Stab}(E)| \leq p^\alpha$.
2. Montrer que $|\operatorname{Stab}(E)| = p^\alpha$ si et seulement si E est une classe à droite Sx, avec $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ et $x \in G$. Montrer que dans ce cas, on a $\operatorname{Stab}(E) = S$.
3. En déduire que $|\Omega| \equiv m|\mathrm{Syl}_p(G)| \bmod p$.
4. Montrer que $|\Omega| \equiv m \bmod p$.
5. En déduire que $|\mathrm{Syl}_p(G)| \equiv 1 \bmod p$.
6. Soit H un p-sous-groupe de G et $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Montrer que H est contenu dans un conjugué de S. (*Indication :* On pourra considérer l'action de H sur l'orbite de S.)
7. Terminer la preuve du théorème de Sylow.
8. Déterminer les 2-sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_4$ et un p-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.
9. *Application :* Montrer que tout groupe d'ordre 15, 56, 63 ou 255 contient un sous-groupe distingué non trivial. Montrer qu'il en va de même pour tout groupe d'ordre pq ou p^2q où p et q sont deux nombres premiers distincts.