ÉNS Lyon — Algèbre 1
L3 — 2010–2011

TD 8

Exercice 1. Montrer que l'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux est un idéal. Qu'en est-il pour un idéal premier ? Maximal ?

Exercice 2. Soient A un anneau intègre et P_1 et P_2 dans $A[X]$ tels que le coefficient dominant de P_2 est inversible dans A ; montrer qu'il existe Q et R dans $A[X]$ vérifiant : $P_1 = QP_2 + R$ et $\deg(R) < \deg(P_2)$.

Dans les deux exercices suivants, on reprend les notations et résultats des exercices 12 et 13 de la feuille 7.

Exercice 3. Par deux méthodes différentes, déterminer un pgcd et une relation de Bézout pour le couple $(3+i, 1+3i)$ dans l'anneau euclidien $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 4.

1. Montrer que tout élément irréductible de $\mathbb{Z}[i]$ divise (dans $\mathbb{Z}[i]$) un nombre premier de $\mathbb{Z}$.
2. Soit p un nombre premier de $\mathbb{Z}$ qui est réductible dans $\mathbb{Z}[i]$. Montrer que p s'écrit dans $\mathbb{Z}[i]$ comme produit de deux irréductibles conjugués complexes l'un de l'autre. Dans quel cas sont-ils associés ? Donner les diviseurs irréductibles de p.
3. Donner les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$.

On pose $\alpha = \dfrac{1+i\sqrt{19}}{2}$. *Le but des trois exercices qui suivent est de démontrer que l'anneau* $\mathbb{Z}[\alpha]$ *est principal mais pas euclidien. Pour tout élément* z *de* $\mathbb{Z}[\alpha]$*, on note* $\mathrm{N}(z)$ *le carré du module complexe de* z.

Exercice 5. Soit A un anneau euclidien.

1. Montrer qu'il existe un élément a dans A non inversible tel que la projection naturelle de A dans A/aA restreinte à $A^\times \cup \{0\}$ soit surjective. *(Indication : lorsque A n'est pas un corps, on pourra considérer un élément non inversible de stathme minimal.)*
2. Soit a dans A vérifiant les conditions ci-dessus ; montrer que l'idéal aA est maximal dans A.
3. Pour chacun des anneaux euclidiens suivants, trouver a satisfaisant aux conditions ci-dessus : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 6.

1. (a) Montrer que α est racine du polynôme $X^2 - X + 5$; en déduire que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X + 5)$.
   (b) Soit A un anneau tel qu'il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[\alpha]$ dans A ; montrer que A contient un élément racine de $X^2 - X + 5$.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[\alpha]$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ni dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
2. En utilisant l'application N, déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\alpha]$.
3. À l'aide de l'exercice précédent, montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ n'est pas euclidien.

Exercice 7.

1. Soient a et b dans $\mathbb{Z}[\alpha]$, avec b non nul ; montrer qu'on est dans l'un des deux cas suivants :
   (i) il existe q et r dans $\mathbb{Z}[\alpha]$ vérifiant $\mathrm{N}(r) < \mathrm{N}(b)$ et $a = qb + r$;
   (ii) il existe q et r dans $\mathbb{Z}[\alpha]$ vérifiant $\mathrm{N}(r) < \mathrm{N}(b)$ et $2a = qb + r$.
2. Montrer que l'idéal engendré par 2 dans $\mathbb{Z}[\alpha]$ est maximal.
3. En s'inspirant de la démonstration dans le cas euclidien, montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ est principal.

Exercice 8. On note A l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X, Y]$ qui sont somme de monômes de degré pair.

1. Vérifier que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}[X, Y]$ et déterminer ses unités.
2. Montrer que X^2 et Y^2 sont irréductibles dans A.
3. Montrer que A n'est pas factoriel.

Exercice 9. On note A le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans lui-même engendré par les fonctions constantes et celles de la forme $x \mapsto \cos(kx)$ ou $x \mapsto \sin(kx)$, k parcourant $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que A est un sous-anneau intègre de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que la famille infinie
$$\{1\} \cup \{x \mapsto \cos(kx), k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{x \mapsto \sin(hx), h \in \mathbb{N}^*\}$$
est une base de A.
3. Montrer que l'application degré définie sur A par
$$\forall f : x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \in A, \deg(f) = \max\{k | a_k \neq 0 \text{ ou } b_k \neq 0\}$$
vérifie : pour tout f et g dans A, $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.
4. Montrer que sin, $1 + \cos$ et $1 - \cos$ sont des irréductibles de A, deux à deux non associés.
5. Montrer que l'anneau A n'est pas factoriel.