ÉNS Lyon — Algèbre 1

L3 — 2010–2011

Examen partiel

Vendredi 12 novembre 2010. Durée 2 heures.

Avertissement. L'usage des notes de cours, ainsi que des feuilles d'exercices qui accompagnent le cours, est autorisé. À l'exclusion de tout autre document.

Exercice 1 Soit G un groupe fini simple (c'est-à-dire dont les seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et G lui-même), dont l'ordre n'est pas premier.

1. Soit p un nombre premier. On suppose que p divise l'ordre de G, mais que p^2 ne le divise pas.
   (a) Montrer que deux p-Sylow distincts de G n'ont en commun que l'élément neutre.
   (b) En déduire que G contient au moins $p^2 - 1$ éléments d'ordre p.
2. On suppose que l'ordre de G est le produit pqr de trois nombres premiers (disons $p < q < r$).
   (a) Combien y a-t-il de r-groupes de Sylow ? Combien G a-t-il d'éléments d'ordre r ?
   (b) En comptant les éléments de G suivant leurs ordres, montrer que $p^2 - pq + q^2 \leq 1$. Qu'en déduisez-vous ?
3. On suppose maintenant que G est d'ordre $4pq$ avec $p < q$ premiers impairs.
   (a) Soit n_q le nombre de q-groupes de Sylow de G. Montrer que $n_q = 2p$ ou $4p$. Combien cela fait-il d'éléments d'ordre q ?
   (b) Montrer que G possède au moins six éléments d'ordre 2 ou 4.
   (c) On suppose d'abord que $n_q = 4p$. Montrer que $p^2 - 4p + 6 \leq 0$ et conclure.
   (d) On suppose plutôt $n_q = 2p$. Montrer que $q = 2p - 1$. En comptant le nombre de p-Sylow de G, montrer que $p = 3$ et $q = 5$.
   (e) En déduire qu'il y a, à isomorphisme près, un seul groupe simple de cardinal de la forme $4pq$ et le déterminer.

Exercice 2 Soit G un groupe fini et $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$ une représentation.

1. Si ρ est irréductible, montrer que la restriction de ρ au centre $Z(G)$ est de la forme
$$\forall g \in Z(G), \quad \rho(g) = \lambda(g)\mathrm{id}_V,$$
   où λ est un caractère linéaire de $Z(G)$.
2. On suppose que parmi les représentations irréductibles, il y en a une qui est fidèle (c'est-à-dire $\ker \rho = \{1\}$). Montrer que $Z(G)$ est cyclique.

Exercice 3 On considère le groupe $\mathbf{UT}_3(\mathbb{F}_3)$ des matrices uni-triangulaires à coefficients dans $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

$$M(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est l'ordre de $\mathbf{UT}_3(\mathbb{F}_3)$? Montrer que les éléments de ce groupe satisfont $X^3 = I_3$.
2. Décrire le centre Z du groupe.
3. Montrer que le quotient $\mathbf{UT}_3(\mathbb{F}_3)/Z$ est abélien, isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.
4. En déduire que parmi les caractères linéaires de $\mathbf{UT}_3(\mathbb{F}_3)$, il y en a exactement neuf valant 1 sur Z.
5. Soit $M \in \mathbf{UT}_3(\mathbb{F}_3) \setminus Z$. Montrer que le centralisateur $Z(M)$ est d'ordre 9. En déduire le nombre et le cardinal des classes de conjugaison de $\mathbf{UT}_3(\mathbb{F}_3)$.
6. Montrer que $\mathbf{UT}_3(\mathbb{F}_3)$ admet deux caractères irréductibles de degré 3, qu'on notera $\chi_\pm$.
7. Soit α un caractère linéaire de $\mathbf{UT}_3(\mathbb{F}_3)$. Montrer que $\alpha\chi_+ = \chi_-$ ou $= \chi_+$. En déduire que $\alpha\chi_+ = \chi_+$ ou $\alpha^2\chi_+ = \chi_+$.
8. Soit c une classe de conjugaison de cardinal 3. Vérifier qu'il existe un caractère linéaire α tel que $\alpha(c) = j = \exp\frac{2i\pi}{3}$. En déduire que $\chi_\pm(c) = 0$.
9. Soit I_3, A, B les éléments de Z. Vérifier que $\chi_+(A)$ et $\chi_+(B)$ sont chacun de la forme $f+g+h$ avec $f,g,h \in \{1, j, j^2\}$. En utilisant $\langle \chi_+, \chi_+ \rangle = 1$, en déduire que $\chi_+(A) \in \{3j, 3j^2\}$.
10. Finalement, dresser la table des caractères de $\mathbf{UT}_3(\mathbb{F}_3)$.