# Algèbres : correction

**Exercice 1.**
Soient $a_1, \dots, a_n$ des générateurs de A, et soit $f : k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n] \to \mathrm{A}$ l'unique morphisme de $k$-algèbres qui envoie $\mathrm{X}_i$ sur $a_i$.
Le fait que les $a_i$ engendrent la $k$-algèbre A nous assure que $f$ est surjectif. Son noyau est un idéal I de $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$, et donc $\mathrm{A} \simeq k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]/\mathrm{I}$. Enfin, puisque $k$ est un corps, le théorème de Hilbert assure que $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$ est noethérien, et donc I est engendré par un nombre fini d'éléments.

**Exercice 2.**

1. Soit
$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\text{A-Alg}}(\mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n])/\mathrm{I}, \mathrm{B}) & \to & \mathrm{B}^n \\ \psi & \mapsto & (\psi(\overline{\mathrm{X}}_1), \dots, \psi(\overline{\mathrm{X}}_n)), \end{array}$$
où $\overline{\mathrm{X}}_i$ est l'image de $\mathrm{X}_i$ dans $\mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]/\mathrm{I}$. Les éléments $\mathrm{X}_i$ engendrent la A-algèbre $\mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$, donc leurs images $\overline{\mathrm{X}}_i$ engendrent l'algèbre quotient $\mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]/\mathrm{I}$. Ainsi, la connaissance des images des $\overline{\mathrm{X}}_i$ suffit à déterminer complètement un morphisme d'algèbres $\mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]/\mathrm{I} \to \mathrm{B}$ : l'application $\Phi$ est injective. Reste maintenant à en déterminer l'image.
Soit donc $\psi : \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]/\mathrm{I} \to \mathrm{B}$ un morphisme d'algèbres et $f \in \mathrm{I}$. Comme $\psi$ est un morphisme d'algèbres, on a $f(\psi(\overline{\mathrm{X}}_1), \dots, \psi(\overline{\mathrm{X}}_n)) = \psi(f(\overline{\mathrm{X}}_1, \dots, \overline{\mathrm{X}}_n))$. Mais $f(\overline{\mathrm{X}}_1, \dots, \overline{\mathrm{X}}_n)$ est l'image dans $\mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]/\mathrm{I}$ de $f \in \mathrm{I}$, c'est-à-dire 0 ! En posant $(b_1, \dots, b_n) = \Phi(\psi)$, on a donc bien $f(b_1, \dots, b_n) = 0$ pour tout $f \in \mathrm{I}$.
Réciproquement, étant donné $(b_1, \dots, b_n) \in \mathrm{B}^n$, l'application $\psi : g \mapsto g(b_1, \dots, b_n)$ est un morphisme $\mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n] \to \mathrm{B}$ de A-algèbres. Si, de plus, $f(b_1, \dots, b_n) = 0$ pour tout $f \in \mathrm{I}$, alors $\psi(f) = f(b_1, \dots, b_n) = 0$ pour tout $f \in \mathrm{I}$, et du coup $\psi$ se factorise par un morphisme $\psi' : \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]/\mathrm{I} \to \mathrm{B}$ de A-algèbres. On a bien $\Phi(\psi') = (b_1, \dots, b_n)$ et l'image de $\Phi$ est exactement $\left\{(b_1, \dots, b_n) \in \mathrm{B}^n \,\middle|\, \forall f \in \mathrm{I}, f(b_1, \dots, b_n) = 0\right\}$, soit
$$\left\{(b_1, \dots, b_n) \in \mathrm{B}^n \,\middle|\, \forall \lambda \in \Lambda, f_\lambda(b_1, \dots, b_n) = 0\right\}.$$

2. D'après la question précédente, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}\text{-Alg}}(\mathrm{R}, \mathbf{C})$ est en bijection avec
$$\left\{(\mathrm{A}, t) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathbf{C} \,\middle|\, t \,\mathrm{dét}\, \mathrm{A} = 1\right\},$$
c'est-à-dire avec $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

3. D'après la première question, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}\text{-Alg}}(\mathbf{R}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]/(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 1), \mathbf{R})$ est en bijection avec les points sur le cercle unité $\mathcal{C}$ dans le plan $\mathbf{R}^2$.

4. Notons $\varepsilon$ l'image de T dans $\mathbf{R}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2)$. On vérifie facilement que tout élément de $\mathbf{R}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2)$ s'écrit de façon unique $a + b\varepsilon$, avec $a$ et $b \in \mathbf{R}$. D'après la première question, la donnée d'un morphisme $g : \mathbf{R}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]/(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 1) \to \mathbf{R}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2)$ de $\mathbf{R}$-algèbres est la donnée d'un couple $(a + b\varepsilon, a' + b\varepsilon) \in \mathbf{R}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2) \times \mathbf{R}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2)$ vérifiant l'équation $(a + b\varepsilon)^2 + (a' + b'\varepsilon)^2 = 1$. En développant et en utilisant $\epsilon^2 = 0$, cette équation devient $(a^2 + a'^2) + 2(ab + a'b')\varepsilon = 1$ dans $\mathbf{R}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2)$. Cette dernière équation est équivalente à :

(i) le point $(a, a')$ est sur $\mathcal{C}$ ;

(ii) le vecteur $(b, b')$ est orthogonal à $(a, a')$.

Autrement dit, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}\text{-Alg}}(\mathbf{R}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]/(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 1), \mathbf{R}[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^2))$ est en bijection avec le *fibré tangent* $\mathrm{T}\mathcal{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{C}$.

**Exercice 3.**

1. On définit un morphisme d'algèbres $\varphi : \mathrm{K}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \longrightarrow \mathrm{K}[\mathrm{T}]$ par $\varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{T}$ et $\varphi(\mathrm{Y}) = \mathrm{T}^2$. On vérifie facilement que $\varphi$ est surjectif et que $\varphi(\mathrm{Y} - \mathrm{X}^2) = 0$. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ker}(\varphi) = (\mathrm{Y} - \mathrm{X}^2)$ pour que $\varphi$ se factorise en un isomorphisme $\bar{\varphi} : \mathrm{K}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]/(\mathrm{Y} - \mathrm{X}^2) \longrightarrow \mathrm{K}[\mathrm{T}]$. Si $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors on peut faire la division euclidienne de P par $\mathrm{Y} - \mathrm{X}^2$ dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}][\mathrm{Y}]$ car ce polynôme a un coefficient dominant inversible. Donc il existe $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}][\mathrm{Y}]$ tels que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}(\mathrm{Y} - \mathrm{X}^2) + \mathrm{R}$. Comme $\deg_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Y} - \mathrm{X}^2) = 1$, on a $\deg_{\mathrm{Y}} \mathrm{R} < 1$ et donc $\mathrm{R} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$. En appliquant $\varphi$ (ce qui revient à évaluer en T), on obtient l'égalité $0 = \mathrm{R}(\mathrm{T})$, donc $\mathrm{R} = 0$. Ainsi on a bien prouvé que $\mathrm{Ker}(\varphi) = (\mathrm{Y} - \mathrm{X}^2)$.
2. Comme dans la question précédente, on définit $\varphi : \mathrm{K}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \longrightarrow \mathrm{K}[\mathrm{T}^2, \mathrm{T}^3]$ par $\varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{T}^2$ et $\varphi(\mathrm{Y}) = \mathrm{T}^3$. Pour $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on peut également faire la division euclidienne de P par $\mathrm{Y}^2 - \mathrm{X}^3$ dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}][\mathrm{Y}]$, soit $\mathrm{P} = \mathrm{Q}(\mathrm{Y}^2 - \mathrm{X}^3) + \mathrm{R}$ avec $\deg_{\mathrm{Y}} \mathrm{R} \leq 1$. En appliquant $\varphi$, on obtient $\mathrm{R}(\mathrm{T}^2, \mathrm{T}^3) = 0$. Or, si on écrit $\mathrm{R} = \mathrm{R}_0 + \mathrm{Y}\mathrm{R}_1$ avec $\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1 \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$, on a $\varphi(\mathrm{R}) = \mathrm{R}_0(\mathrm{T}^2) + \mathrm{T}^3\mathrm{R}_1(\mathrm{T}^2)$. En séparant les termes de degré pair et ceux de degré impair, on voit alors que $\mathrm{R} = 0$, et comme précédemment, $\varphi$ se factorise en $\mathrm{K}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]/(\mathrm{Y}^2 - \mathrm{X}^3) \simeq \mathrm{K}[\mathrm{T}^2, \mathrm{T}^3]$.

**Exercice 4.**

1. Soit E un espace vectoriel de dimension $n$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de E. La propriété universelle est alors une propriété bien connue des bases. L'application $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \to \mathrm{F}^n$ donnée par $f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ est alors bijective.
2. Soit $\mathrm{G} = \mathbf{Z}^n$ et $x_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ le vecteur dont la $i$-ème coordonnée vaut 1 et les autres sont nulles. Étant donné un groupe abélien H et un $n$-uplet $(y_1, \ldots, y_n)$ d'éléments de H, l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{Z}^n & \to & \mathrm{H} \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \mapsto & \sum_{i=0}^{n} \lambda_i y_i \end{array}$$

vérifie alors $\varphi(x_i) = y_i$. En outre, si une autre application $\psi : \mathbf{Z}^n \to \mathrm{H}$ a la même propriété, $\psi$ et $\varphi$ sont deux applications linéaires coïncidant sur une famille génératrice du $\mathbf{Z}$-module Z, donc $\varphi = \psi$, ce qui montre l'unicité. L'application $\mathrm{Hom}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \to \mathrm{H}^n$ donnée par $f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ est alors bijective.

Supposons par l'absurde l'existence d'un tel groupe abélien fini G (noté additivement) muni d'un $n$-uplet d'éléments $(x_1, \ldots, x_n)$. L'élément $x_1$ doit être d'ordre fini : soit donc $\mathrm{N} > 0$ tel que $\mathrm{N}x_1 = 0$. D'après la propriété universelle, il doit exister un (unique) morphisme $f : \mathrm{G} \to \mathbf{Z}/2\mathrm{N}\mathbf{Z}$ envoyant $x_1$ sur $\overline{1}$ et les $x_i$, $i > 1$ sur $\overline{0}$. On a alors $\overline{0} = f(0_{\mathrm{G}}) = f(\mathrm{N}x_1) = \mathrm{N}f(x_1) = \mathrm{N}\overline{1} = \overline{\mathrm{N}}$ dans $\mathbf{Z}/2\mathrm{N}\mathbf{Z}$, ce qui constitue une contradiction.
3. Soit $(\mathrm{E}, (x_1, \ldots, x_n))$ et $(\mathrm{F}, (y_1, \ldots, y_n))$ deux $k$-espaces vectoriels munis de $n$-uplets possédant la propriété universelle. Il existe alors deux applications $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telles que $f(x_i) = y_i$ et $g(y_i) = x_i$. La composée $g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est alors une application envoyant les $x_i$ sur eux-mêmes. Mais, d'après la propriété universelle, il y a unicité d'une telle application : on a donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Le raisonnement symétrique montre que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$, d'où l'isomorphisme $\mathrm{E} \simeq \mathrm{F}$. Remarquons que l'on a démontré

une propriété plus forte : il existe un unique isomorphisme $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ envoyant $x_i$ sur $y_i$. On dit parfois que *la solution au problème universel est unique à unique isomorphisme près.*

La preuve est rigoureusement identique dans le cas des groupes abéliens ou des algèbres commutatives.

**Exercice 5.**

1. Par unicité du degré, un polynôme ne peut être homogène de deux degrés différents, à part le polynôme nul qui est homogène de tous les degrés. La somme de deux polynômes homogènes est homogène si et seulement s'ils ont même degré, et le produit de deux polynômes homogènes est toujours homogène, de degré la somme des degrés.
2. Une base de $\mathrm{K}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]_d$ est donnée par les monômes $\mathrm{X}_1^{i_1} \ldots \mathrm{X}_n^{i_n}$ avec $i_1 + \cdots + i_n = d$. Il s'agit donc de compter le nombre de tels $n$-uplets. Cela revient à dénombrer le nombre de manières de placer $d$ points (que l'on peut se représenter le long d'une ligne) dans $n$ cases, avec éventuellement des cases vides. Pour cela considérons $n + d - 1$ éléments, qui vont être soit des points (pour $d$ d'entre eux), soit des séparateurs entre deux cases (pour les $n - 1$ autres). Il suffit donc de choisir lesquels parmi ces éléments vont être des points, et il y a donc $\binom{n+d-1}{d}$ choix possibles. Ainsi, $\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{K}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]_d = \binom{n+d-1}{d}$.
3. Il s'agit de voir que tout polynôme s'écrit de manière unique comme somme finie de polynômes homogènes. Pour cela, étant donné un polynôme P, il suffit de regrouper les monômes par degré.
4. Il fallait bien sûr supposer P et Q non nul (le produit du polynôme nul par un polynôme quelconque est toujours homogène). Si PQ est homogène de degré $d$, et que P posssède au moins deux composantes homogènes non nulles, soit $\mathrm{P}_i$ celle de plus petit degré et $\mathrm{P}_j$ celle de plus haut degré. De même, soit $\mathrm{Q}_k$ la composante de plus bas degré de Q et $\mathrm{Q}_l$ celle de plus haut degré (avec éventuellement $k = l$). Alors $\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_k$ et $\mathrm{P}_j\mathrm{Q}_l$ sont les composantes homogènes de plus bas et de plus haut degré de PQ, et ont deux degrés différents, ce qui contredit le fait que PQ soit homogène.
5. Supposons que $\mathrm{F} = \mathrm{X}_1^2 + \cdots + \mathrm{X}_n^2$ n'est pas irréductible. Alors $\mathrm{X}_1^2 + \cdots + \mathrm{X}_n^2 = \mathrm{PQ}$ avec $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbf{R}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ homogènes de degré 1, donc de la forme $\mathrm{P} = a_1\mathrm{X}_1 + \cdots + a_n\mathrm{X}_n$ et $\mathrm{Q} = b_1\mathrm{X}_1 + \cdots + b_n\mathrm{X}_n$. Puisque $\mathrm{F} = \mathrm{PQ}$, on doit avoir $a_ib_i = 1$ et $a_ib_j = -a_jb_i$, $\forall i \neq j$. En multipliant cette dernière égalité par $b_ib_j$, on obtient $b_j^2 = -b_i^2$, ce qui est impossible car $b_i, b_j \in \mathbf{R}$.

   On peut également voir ce fait géométriquement : si F se décomposait, on a vu que ce serait comme produit de deux formes linéaires non nulles. Ainsi, son lieu d'annulation $\mathrm{V}(\mathrm{F}) \subset \mathbf{R}^n$ serait l'union de deux hyperplans (éventuellement confondus). Mais $\mathrm{V}(\mathrm{F}) = \{0\}$ donc c'est impossible.

   Dans $\mathbf{C}$, on a par contre $(\mathrm{X} + i\mathrm{Y})(\mathrm{X} - i\mathrm{Y}) = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2$. En revanche, pour $n \geq 3$, l'argument précédent marche : le cône $\mathrm{V}(\mathrm{X}_1^2 + \cdots + \mathrm{X}_n^2)$ n'est alors pas l'union de deux hyperplans complexes (exercice : on pourra par exemple regarder son intersection avec des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels ou affines bien choisis).

**Exercice 6.**

1. Soit $x_0$ une racine de $f$ dans une extension $\mathrm{K}'$ de K, $y_0$ une racine de $g$ dans une extension $\mathrm{K}''$ de $\mathrm{K}'$.

   Si on avait $(f(\mathrm{X}), g(\mathrm{Y})) = \mathrm{K}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, alors on aurait une relation de la forme
   $$u(\mathrm{X}, \mathrm{Y})f(\mathrm{X}) + v(\mathrm{X}, \mathrm{Y})g(\mathrm{Y}) = 1.$$

En évaluant cette relation en $\mathrm{X} = x_0$, $\mathrm{Y} = y_0$, on obtient alors $0 = 1$, d'où une contradiction.

2. Faire de même avec des zéros de chaque polynôme.
3. Remarquons que $\mathrm{K}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]/(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k) \simeq \mathrm{K}[\mathrm{X}_{k+1}, \ldots, \mathrm{X}_n]$ et donc est intègre. Nécessairement, cela implique que l'idéal $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k)$ est premier.
Ces idéaux sont deux à deux distincts. En effet, si $a \neq 0$ est un élément de K, alors, tous les éléments de $(\mathrm{X}_1, \ldots \mathrm{X}_k)$ s'annulent en $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ fois}}, a, 0 \ldots, 0)$, alors que $\mathrm{X}_{k+1}$ ne s'y annule pas.
4. Nous avons ici plusieurs solutions. La plus simple si on suppose le résultat déjà connu dans le cas d'un corps est sans doute de se placer dans le corps des fractions de A.
Toutefois, il est possible de retrouver le résultat de la première question de manière purement combinatoire. Pour cela, supposons de nouveau qu'on aie une relation de la forme $u(\mathrm{X}, \mathrm{Y})f(\mathrm{X}) + v(\mathrm{X}, \mathrm{Y})g(\mathrm{Y}) = 1$, et notons $f(\mathrm{X}) = \sum_{k<n} a_i \mathrm{X}^k + a\mathrm{X}^n, g(\mathrm{Y}) = \sum_{l<m} b_l \mathrm{Y}^l + b\mathrm{Y}^m, \deg u = r$ et $\deg v = s$. En considérant les parties homogènes de plus haut degré, on obtient : $au_r(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{X}^n + bv_s(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Y}^m = 0$. Ainsi, il existe $w \in \mathrm{A}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ tel $u_r(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = b\mathrm{Y}^m w$ et $v_s = -a\mathrm{X}^n w$.
On a alors :
$$(u(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) - wg(\mathrm{Y}))f(\mathrm{X}) + (v(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + wf(\mathrm{X}))g(\mathrm{Y}) = 1$$
avec $\deg(u - wg) < \deg u$. Si on suppose que $u$ était au départ de degré homogène minimal, on arrive à une contradiction.

**Exercice 7.** Puisqu'on a $\mathrm{U}(1) = 1$ (par définition d'un morphisme d'algèbre), K est laissé fixe par U, pour tout morphisme d'algèbre U.

1) Si $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$, on a $\mathrm{U}_{\alpha,\beta}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\alpha + \beta\mathrm{X})$. L'inverse doit être $\mathrm{U}_{-\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{\beta}}$. En effet, $\mathrm{U}_{-\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{\beta}} \circ \mathrm{U}_{\alpha,\beta}(\mathrm{X}) = \mathrm{U}_{-\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{\beta}}(\alpha + \beta\mathrm{X}) = \frac{1}{\beta}(\beta\mathrm{X} + \alpha) - \frac{\alpha}{\beta} = \mathrm{X}$.
2) Si U est un K-automorphisme, alors il existe $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{U}(\mathrm{X}) = \mathrm{P}$ et $\mathrm{U}(\mathrm{Q}) = \mathrm{X}$. Par division euclidienne, il existe $\mathrm{R} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) - \mathrm{Q}(0) = \mathrm{X}\mathrm{R}(\mathrm{X})$. Alors $\mathrm{X} - \mathrm{Q}(0) = \mathrm{U}(\mathrm{Q}) - \mathrm{U}(\mathrm{Q}(0)) = \mathrm{U}(\mathrm{Q} - \mathrm{Q}(0)) = \mathrm{U}(\mathrm{X}\mathrm{R}) = \mathrm{U}(\mathrm{X})\mathrm{U}(\mathrm{R}) = \mathrm{P}\mathrm{U}(\mathrm{R})$. Comme U est surjectif, P ne peut pas être une constante et donc $\deg \mathrm{P} \geq 1$, ce qui force $\mathrm{U}(\mathrm{R}) \in \mathrm{K}^*$. En posant $\beta = \mathrm{U}(\mathrm{R})^{-1}$ et $\alpha = -\beta.\mathrm{Q}(0)$, on a $\mathrm{U}(\mathrm{X}) = \beta(\mathrm{X} - \mathrm{Q}(0)) = \beta\mathrm{X} + \alpha$, et donc $\mathrm{U} = \mathrm{U}_{\alpha,\beta}$.

**Exercice 8.**

1. L'application $g$ est bilinéaire par construction : vérifions par exemple que $g(x + x', y) = g(x, y) + g(x', y)$. Par définition, $g(x + x', y)$ est la classe dans L/K de $e_{x+x',y}$ et $g(x, y) + g(x', y)$ est celle de $e_{x,y} + e_{x',y}$. Comme $e_{x+x',y} - e_{x,y} - e_{x',y}$ est dans K, on a donc $g(x + x', y) = g(x, y) + g(x', y)$. Les autres vérifications se traitent de la même manière. Par définition, les $e_{x,y}$ engendrent L. Leurs images, les $x \otimes y$, doivent donc engendrer le quotient L/K. On a donc bien que $\operatorname{im} g$ engendre $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$.
2. L'application $f : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ définit un unique morphisme $\widetilde{f} : \mathrm{L} \to \mathrm{P}$ par $\widetilde{f}(e_{x,y}) = f(x, y)$. Puisque $f$ est A-bilinéaire, on a pour tous $x, x' \in \mathrm{M}$ et $y \in \mathrm{N}$, $\widetilde{f}(e_{x+x',y} - e_{x,y} - e_{x',y}) = \widetilde{f}(e_{x+x',y}) - \widetilde{f}(e_{x,y}) - \widetilde{f}(e_{x',y}) = f(x + x', y) - f(x, y) - f(x', y) = 0$. De la même façon, $\widetilde{f}$ s'annule sur les autres générateurs de K, donc sur K, et passe ainsi au quotient en une application $\overline{f} : \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \to \mathrm{P}$. En outre, une telle application doit valoir $f(x, y)$ en $x \otimes y$ : elle est donc complètement déterminée sur $\operatorname{im} g$. Puisque $\operatorname{im} g$ engendre $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$, une telle application est unique.

3. C'est encore l'unicité d'une solution au problème universel : soit $(\mathrm{T}, g')$ un tel couple. Puisque $g : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ est bilinéaire, il existe une application $\overline{g} : \mathrm{T} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ telle que $g = \overline{g} \circ g'$. Symétriquement, il existe une unique application $\overline{g}' : \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \to \mathrm{T}$ telle que $g' = \overline{g}' \circ g$. On a donc $g' = \overline{g}' \circ \overline{g} \circ g'$. Mais l'application (bilinéaire) $g'$ doit se factoriser uniquement en $h \circ g'$, avec $h : \mathrm{T} \to \mathrm{T}$ linéaire. Puisque $h = \mathrm{id}_{\mathrm{T}}$ convient, on a nécessairement $\overline{g}' \circ \overline{g} = \mathrm{id}_{\mathrm{T}}$. Symétriquement, $\overline{g} \circ \overline{g}' = \mathrm{id}_{\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}}$ et $\overline{g}$ et $\overline{g}'$ fournissent des isomorphismes réciproques $\mathrm{T} \simeq \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{M} \times \mathrm{N} \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g'"] & \\
\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \arrow[rr, bend left, "\overline{g}'"] & & \mathrm{T} \arrow[ll, bend left, "\overline{g}"]
\end{tikzcd}$$

4. On définit une application bilinéaire $\widetilde{\mu} : \mathrm{L} \times \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ par la formule $\widetilde{\mu}(e_{x,y}, e_{x',y'}) = e_{xx',yy'}$. Démontrons que $\widetilde{\mu}(\mathrm{K} \times \mathrm{L}) \subset \mathrm{K}$ et que $\widetilde{\mu}(\mathrm{K} \times \mathrm{L}) \subset \mathrm{K}$ :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}(e_{x+x',y} - e_{x,y} - e_{x',y}, e_{\xi,\eta}) &= \widetilde{\mu}(e_{x+x',y}, e_{\xi,\eta}) - \widetilde{\mu}(e_{x,y}, e_{\xi,\eta}) - \widetilde{\mu}(e_{x',y}, e_{\xi,\eta}) \\
&= e_{(x+x')\xi,y\eta} - e_{x\xi,y\eta} - e_{x'\xi,y\eta} \in \mathrm{K} \\
\widetilde{\mu}(e_{ax,y} - a e_{x,y}, e_{\xi,\eta}) &= \widetilde{\mu}(e_{ax,y}, e_{\xi,\eta}) - a\widetilde{\mu}(e_{x,y}, e_{\xi,\eta}) \\
&= e_{ax\xi,y\eta} - a e_{x\xi,y\eta} \in \mathrm{K},
\end{aligned}$$

et idem pour les générateurs symétriques. L'application bilinéaire définit donc sans ambiguïté une application $\mu : (\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}) \times (\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}) \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ vérifiant $\mu(x \otimes y, x' \otimes y') = xx' \otimes yy'$.

On vérifie alors sans difficulté que $\mu$ définit une structure d'anneau sur $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$.

Remarquons maintenant que pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a(1 \otimes 1)$. On a donc un morphisme $\rho : \mathrm{A} \to \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ à valeurs dans le centre de $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$, qui est donc bien une A-algèbre.