Groupe linéaire

Exercice 1. Soit A un anneau. Déterminer le centre de l'anneau $\mathrm{M}_n(\mathrm{A})$.

Exercice 2. (Cardinal des groupes linéaires sur les corps finis)
Calculer les cardinaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q), \mathrm{SL}_n(\mathbf{F}_q), \mathrm{PGL}_n(\mathbf{F}_q)$ et $\mathrm{PSL}_n(\mathbf{F}_q)$.

Exercice 3. Soit K un corps fini et n un entier supérieur ou égal à 3. Montrer que les sous-groupes distingués de $\mathrm{SL}_n(\mathrm{K})$ distincts de $\mathrm{SL}_n(\mathrm{K})$ sont cycliques.

Exercice 4. (Sous-groupes de Sylow)
Soit p un nombre premier et q une puissance de p.

1. Montrer que les p-sous-groupes de Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ sont formés d'endomorphismes de polynôme caractéristique $(\mathrm{X}-1)^n$ (ou *endomorphismes unipotents*) et dont les matrices sont toutes triangulaires dans une même base.
2. On appelle *drapeau complet* de K^n toute suite strictement croissante (pour l'inclusion), $\mathbf{V} = (\mathrm{V}_0, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n)$ de sous espaces-vectoriels de K^n. Exhiber une bijection entre l'ensemble $\mathrm{Syl}_p(\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q))$ des p-sous-groupes de Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ et l'ensemble des drapeaux complets de $\mathbf{F}_q^n$. En déduire le nombre de p-sous-groupes de Sylow.

Exercice 5. (Un grand classique)
Soit E un k-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit r un entier compris entre 1 et $n-1$, et $u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ laissant stable tout sous-espace vectoriel de E de dimension r. Montrer que u est une homothétie.

Exercice 6. (Matrices élémentaires)
Soit R un anneau commutatif. On appelle *groupe des matrices élémentaires* $n \times n$ et on note $\mathrm{E}_n(\mathrm{R})$ le groupe engendré par les matrices de la forme $1 + xe_{ij}$ avec $i \neq j$ et $x \in \mathrm{R}$.

1. Soit k un corps. Que vaut $\mathrm{E}_n(k)$?
2. Dans la suite de l'exercice, $\mathrm{R} = k[x, y]$. Si $f \in \mathrm{R}$ est non nul, on appelle *forme dominante* de f et on note $\mathrm{FD}(f)$ la somme de ses monômes de degré (total) maximal. On pose par convention $\mathrm{FD}(0) = 0$. Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathrm{A}) \setminus \mathrm{M}_2(k)$, $\det \mathrm{FD}(\mathrm{A}) = 0$.
3. Si $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{R})$, on note $\mathrm{FD}(\mathrm{A})$ la matrice $(\mathrm{FD}(a_{i,j}))_{i,j}$. Montrer que si M appartient à $\mathrm{E}_2(\mathrm{R}) \setminus \mathrm{M}_2(k)$, alors l'une des conclusions suivantes advient :
   – l'un des coefficients de M est nul ;
   – l'une des lignes de $\mathrm{FD}(\mathrm{M})$ est un multiple (dans R) de l'autre.
4. En déduire que la *matrice de Cohn* $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1+xy & x^2 \\ -y^2 & 1-xy \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{SL}_2(\mathrm{R}) \setminus \mathrm{E}_2(\mathrm{R})$.

Exercice 7. (Groupes simples d'ordre 168)
Le but de cet exercice est de prouver qu'un groupe simple G d'ordre 168 est nécessairement isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$. Pour cela, on fixe un 7-sous-groupe de Sylow P de G et on note N son normalisateur dans G. Comme d'habitude, on note $\mathrm{Syl}_p(\mathrm{G})$ l'ensemble des p-sous-groupes de Sylow de G.

1. Quel est le cardinal de $\mathrm{Syl}_7(\mathrm{G})$? Et celui de N ?
2. Montrer que P agit librement et transitivement sur $\mathrm{Syl}_7(\mathrm{G}) \setminus \{\mathrm{P}\}$. (On rappelle qu'un groupe agit *librement* sur un ensemble X si le stabilisateur de tout élément de X est trivial.)
3. En plongeant G dans $\mathfrak{S}_8$, montrer que l'ordre de tout élément de G est inférieur ou égal à 15. En déduire que N n'est pas cyclique, puis qu'il admet sept 3-sous-groupes de Sylow.
4. Soit P' un 7-sous-groupe de Sylow de G, distinct de P et N' son normalisateur dans G. On pose $\mathrm{M} = \mathrm{N} \cap \mathrm{N}'$ et H son normalisateur dans G. En comptant les classes de N modulo P, montrer que M a trois éléments.
5. Démontrer que G admet vingt-huit 3-sous-groupes de Sylow.
6. Quel est le cardinal de H ? Montrer que H n'est pas cyclique (pour cela, on pourra considérer les conjugués de H et compter les éléments de G d'ordre 3, 7 puis, sous l'hypothèse H cyclique, 6).
7. Soit π un générateur de P. On note $\widetilde{\pi}$ la permutation de $\mathrm{Syl}_7(\mathrm{G})$ associée à π. On construit une bijection Ψ entre $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_7) = \mathbf{F}_7 \cup \{\infty\}$ et $\mathrm{Syl}_7(\mathrm{G})$ en posant $\Psi(\infty) = \mathrm{P}$ et $\Psi(k) = \widetilde{\pi}^k(\mathrm{P}')$ pour $k \in \mathbf{F}_7$. On s'autorise ainsi à identifier $\mathrm{Syl}_7(\mathrm{G})$ et $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_7)$. On choisit un générateur μ de M et on se donne un élément τ de $\mathrm{H} \setminus \mathrm{M}$.
   Montrer qu'il existe un entier n tel que $\mu\pi\mu^{-1}$ soit égal à π^n. En calculant $\mu^k\pi\mu^{-k}$ pour k entier, montrer que n vaut 2 ou 4. En déduire que, quitte à remplacer μ par un autre générateur de M, on peut supposer que μ agit sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_7)$ par $x \mapsto 2x$.
8. Montrer que l'on a $\tau\mu\tau^{-1} = \mu^{-1}$. En déduire que τ agit sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_7)$ par $x \mapsto \alpha/x$ où $\alpha \in \mathbf{F}_7^*$ n'est pas un carré (pour cela, on pourra montrer que τ agit sans point fixe).
9. Après avoir comparé $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_7)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$, montrer que π, μ et τ engendrent G puis que G est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$.
10. Montrer que $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_2)$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{F}_7)$.

Exercice 8. (Décomposition de Bruhat)
Soit K un corps et n un entier strictement positif. On appelle *drapeau complet* de K^n toute suite strictement croissante (pour l'inclusion), $\mathbf{V} = (\mathrm{V}_0, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n)$ de sous-espaces vectoriels de K^n.
Si $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$ sont deux drapeaux complets de K^n, on pose pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$s(i) = s_{\mathbf{V},\mathbf{W}}(i) = \min \left\{ j \in \{1, \ldots, n\} \,\middle|\, \mathrm{W}_i \subset \mathrm{W}_{i-1} + \mathrm{V}_j \right\}.$$

1. Construire des vecteurs $v_1, \ldots v_n$ tels que l'on ait, pour tout i compris entre 1 et n :
   $\mathrm{W}_i = \mathrm{W}_{i-1} \oplus \mathrm{K}v_i$, $\mathrm{V}_{s(i)} = \mathrm{V}_{s(i)-1} \oplus \mathrm{K}v_i$ et $v_i \notin \mathrm{W}_{i-1} + \mathrm{V}_{s(i)-1}$.
2. Montrer que s est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. Montrons que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit $s_{\mathbf{F},\mathbf{G}}$ pour un certain couple $(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ de drapeaux complets.
3. On dit qu'une base $\mathscr{B}$ de K^n est *adaptée* à un drapeau complet $\mathbf{F}$ si chaque F_i est engendré par une partie de $\mathscr{B}$. Montrer que la famille (v_i) construite à la question précédente est une base de K^n adaptée à la fois à $\mathbf{V}$ et $\mathbf{W}$.
4. Combien y a-t-il d'orbites pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ sur l'ensemble des couples de drapeaux complets ?
5. Déduire des questions précédentes une démonstration de la *décomposition de Bruhat* $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) = \bigsqcup_{w \in \mathrm{W}} \mathrm{B}w\mathrm{B}$, où B désigne l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ (le *sous-groupe de Borel*) et W l'ensemble des matrices de permutation (le *sous-groupe de Weyl*).