
Groupe orthogonal et quadriques

Exercice 1. (Échauffement)

1. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer qu'il existe S_1 et $S_2 \in M_n(\mathbf{R})$ symétriques telles que $A = [S_1, S_2]$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, le groupe $SO_n(\mathbf{R})$ (muni de la topologie induite par la topologie d'espace vectoriel normé de $M_n(\mathbf{R})$) est connexe par arcs.
3. Soit n et m deux entiers ≥ 1 différents. Montrer que les groupes $O_n(\mathbf{R})$ et $O_m(\mathbf{R})$ ne sont pas isomorphes. (*Indication* : on pourra dénombrer les classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2.)

Exercice 2. (Exponentielle)

Montrer que l'exponentielle induit une application surjective

$$\exp : \mathfrak{so}_n(\mathbf{R}) \rightarrow SO_n(\mathbf{R}),$$

où $\mathfrak{so}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices antisymétriques dans $M_n(\mathbf{R})$.

Exercice 3. (Morphismes vers $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$)

Soit $n \geq 2$.

1. Déterminer les morphismes $O_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
2. Si $A \subset \mathbf{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 2$, on appelle *retournement d'axe* A l'unique endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ coïncidant avec id sur A et avec $-\text{id}$ sur l'orthogonal de A (pour le produit scalaire canonique).
Montrer que si $n \geq 3$, les retournements engendrent $SO_n(\mathbf{R})$.
3. Déterminer les morphismes $SO_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 4. (Structure de $SO_n(\mathbf{R})$)**A. Simplicité de $SO_3(\mathbf{R})$.**

1. Déterminer le centre de $O_n(\mathbf{R})$ et celui de $SO_n(\mathbf{R})$. On note $PSO_n(\mathbf{R})$ le quotient de $SO_n(\mathbf{R})$ par son centre.
2. Soit $N \triangleleft SO_3(\mathbf{R})$ un sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbf{R})$ non réduit à $\{\text{id}\}$. Démontrer qu'il contient un élément u tel que $-1 \leq \text{tr } u < 3$.
3. En considérant les commutateurs de u et d'un élément de $SO_3(\mathbf{R})$, montrer qu'il existe $t_0 < 3$ tel que pour tout $t \in [t_0, 3]$, N contienne un élément de trace t .
4. En déduire que N contient un élément d'ordre (fini) pair, puis que N contient un retournement.
5. Conclure.

B. Simplicité de $PSO_n(\mathbf{R})$, $n \geq 5$.

Dans la suite de l'exercice, $n \geq 5$.

1. Pour tout sous-espace vectoriel $F \subset \mathbf{R}^n$, on considère $G_F = \left\{ u \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) \mid u|_F = \mathrm{id}_F \right\}$.
À quoi est isomorphe G_F ?
2. Soit $u \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ différent de $\pm \mathrm{id}$. Montrer qu'il existe un élément $v \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ tel que le commutateur $c = [u, v]$ soit différent de $\pm \mathrm{id}$ mais fixe un vecteur unitaire.
3. Démontrer qu'il existe $w \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ tel que le commutateur $[c, w]$ soit différent de $\pm \mathrm{id}$ mais fixe un sous-espace vectoriel de codimension ≤ 2 .
4. En déduire la liste des sous-groupes distingués de $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ et la simplicité de $\mathrm{PSO}_n(\mathbf{R})$.

Remarque. Le groupe $\mathrm{PSO}_4(\mathbf{R})$ n'est pas simple : il est isomorphe à $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$.

Exercice 5. (Classes de similitude dans $M_2(\mathbf{R})$)

Soit $M \in M_2(\mathbf{R})$ une matrice ayant deux valeurs propres complexes différentes. Montrer que la classe de similitude de M est une quadrique affine d'un hyperplan affine de $M_2(\mathbf{R})$, que l'on déterminera suivant la diagonalisabilité de M sur $\mathbf{R}$.