Révisions

Sauf mention explicite du contraire, les anneaux seront toujours supposés commutatifs, unitaires, et non réduits à l'élément nul. Un morphisme d'anneaux $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ vérifiera toujours $f(1_\mathrm{A}) = 1_{\mathrm{A}'}$.

Exercice 1. Soit A un anneau et $\mathrm{I} \subset \mathrm{A}$ un idéal.

1. Montrer que si I est maximal, il est premier.
2. Montrer que I est premier si et seulement si A/I est intègre.
3. Montrer que I est maximal si et seulement si A/I est un corps.

Exercice 2. Soit K un corps.

1. Déterminer les idéaux de K.
2. Montrer que si A est un anneau et que $f : \mathrm{K} \to \mathrm{A}$ est un morphisme, f est injectif.

Exercice 3. Soit A un anneau intègre. Montrer que $(a) \in \mathrm{A}$ est irréductible si et seulement si $\mathrm{I} = (a)$ est maximal parmi les idéaux principaux. Quels sont les idéaux premiers de $\mathbf{C}[\mathrm{X}]$? Lesquels sont maximaux ?

Exercice 4. Soit A[X] l'anneau des polynômes à une variable.

1. Montrer que si $\mathrm{D} \in \mathrm{A}[\mathrm{X}]$ a un coefficient dominant inversible et que $\mathrm{P} \in \mathrm{A}[\mathrm{X}]$, il existe des polynômes $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathrm{A}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P} = \mathrm{QD} + \mathrm{R}$, avec $\deg \mathrm{R} < \deg \mathrm{D}$.
2. Montrer que si A est intègre et que $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{A}[\mathrm{X}]$ sont des polynômes non nuls, alors $\deg(\mathrm{PQ}) = \deg \mathrm{P} + \deg \mathrm{Q}$.
   (a) Montrer que si $a \in \mathrm{A}$ est irréductible, il le reste dans A[X].
   (b) Montrer que si K est un corps, K[X] contient une infinité d'éléments irréductibles. Que se passe-t-il si on remplace K par un anneau factoriel ?
   (c) Montrer que si A est intègre, le quotient Q et le reste R obtenus à la première question sont uniques.
3. Montrer que si K est un corps, K[X] est un anneau principal. En décrire les idéaux maximaux.
4. Soit L un corps et $\mathrm{K} \subset \mathrm{L}$ un sous-corps. Étant donné deux polynômes $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ non nuls, quel est le lien entre $\mathrm{pgcd}_{\mathrm{K}[\mathrm{X}]}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ et $\mathrm{pgcd}_{\mathrm{L}[\mathrm{X}]}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$? Quel lien y a-t-il entre l'irréductibilité de P sur K[X] et sur L[X] ?

Exercice 5. Montrer que si K est un corps et que $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ est un polynôme non nul de degré au plus 3, alors P est irréductible sur K[X] si et seulement si P n'a pas de racine dans K. Exhiber un polynôme de $\mathbf{Q}[\mathrm{X}]$ qui n'a pas de racine mais est tout de même réductible.

Exercice 6. Soit K un corps. Si $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$, on pose $\mathrm{P}' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, \mathrm{X}^{k-1}$.

1. Montrer que si $a \in \mathrm{K}$ et que $(\mathrm{X} - a)^2$ divise P, alors $(\mathrm{X} - a)$ divise P'.

2. Pour quels nombres premiers p le polynôme $X^4 + X + 6$ possède-t-il une racine multiple dans $\mathbf{F}_p$?

Exercice 7. Soit A un anneau factoriel de corps des fractions K. Montrer que si

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$$

est un polynôme non nul, de degré n, et qu'il a une racine $x = a/b \in K$ (avec $a, b \in A$ premiers entre eux), alors b divise a_n et a divise a_0. En déduire que les racines (dans K) des polynômes unitaires de A[X] appartiennent en fait à A.

Exercice 8. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme tel que $\forall x \in \mathbf{R}, P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe $R, S \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P = R^2 + S^2$.

Exercice 9. Soit K un corps et $(a, b) \in K^\times \times K$.

1. Montrer que $P \in K[X]$ est irréductible si et seulement si $P(aX + b)$ est irréductible.
2. Soit $P \in \mathbf{Q}[X]$ irréductible de degré ≥ 2. Montrer que si α et α' sont deux racines distinctes de P dans $\mathbf{C}$, alors $\alpha - \alpha' \notin \mathbf{Q}$.

Exercice 10. Soit A un anneau intègre et K son corps des fractions. Soit

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$$

un polynôme non constant. On dira que P *vérifie le critère d'Eisenstein* s'il existe un idéal premier $I \subset A$ tel que

(i) pour tout $0 \leq i < n$, $a_i \in I$;

(ii) $a_n \notin I$ et $a_0 \notin I^2$.

1. Démontrer que si P vérifie le critère d'Eisenstein, toute décomposition $P = P_1 P_2$ avec $P_1, P_2 \in A[X]$ vérifie $\deg P_1 = 0$ ou $\deg P_2 = 0$.
2. Donner un exemple de polynôme $P \in \mathbf{Z}[X]$ réductible dans $\mathbf{Z}[X]$ mais vérifiant le critère d'Eisenstein.
3. Montrer que si A est factoriel, et que $P \in A[X]$ vérifie le critère d'Eisenstein, P est irréductible dans K[X].
4. Montrer que si p est premier, le polynôme $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.
5. Expliquer pourquoi $P(X, Y) = Y^2 + (X^2 + 1)^2 Y + (X^2 + 1)$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X, Y]$.
6. Montrer que pour tout nombre premier $p \neq 2$, le polynôme $X^n - p$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[i][X]$. (*Indication : p est-il toujours premier dans $\mathbf{Z}[i]$?*)