Entiers algébriques

Dans toute la feuille, on appelle corps de nombres *une extension finie de* $\mathbf{Q}$*. On note* $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ *l'ensemble des nombres complexes entiers sur* $\mathbf{Z}$ *et, si* K *est un corps de nombres, on note* $\mathcal{O}_{\mathrm{K}} = \mathcal{O}_{\mathbf{C}} \cap \mathrm{K}$*. On appellera cet anneau* l'anneau des entiers du corps de nombres K*.*
Tous les corps considérés seront des sous-corps de $\mathbf{C}$*. Si on parle* du *polynôme minimal d'un élément, il sera entendu qu'il s'agit du représentant unitaire.*

Exercice 1. Préliminaires

1. Montrer que tout élément $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ est algébrique sur $\mathbf{Q}$ et que réciproquement, un élément $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$ appartient à $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ si et seulement si son polynôme minimal $\mathrm{P} \in \mathbf{Q}[\mathrm{X}]$ est à coefficients dans $\mathbf{Z}$.
2. Soit K un corps de nombres et $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$. Montrer que $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ si et seulement si le polynôme minimal de α sur K est à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$.
3. Rappeler ce qu'est $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$, quand $\mathrm{K}/\mathbf{Q}$ est une extension quadratique.

Exercice 2. Trace et norme
Soit L/K une extension de corps de nombres et $\alpha \in \mathrm{L}$. Soit

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\alpha} : \mathrm{L} &\to \mathrm{L} \\ x &\mapsto \alpha x. \end{aligned}$$

(On pourra omettre l'exposant L s'il est clair dans le contexte).

1. Montrer que $\mathrm{T}^{\mathrm{L}}_{\alpha}$ est une application K-linéaire. On note respectivement $\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\alpha)$ et $\mathrm{Nm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\alpha)$ (et on appelle respectivement *trace* et *norme* de l'élément α) la trace et le déterminant de cette application K-linéaire.
2. Que valent $\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\alpha)$ et $\mathrm{Nm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\alpha)$ quand $\alpha \in \mathrm{K}$?
3. Montrer que
$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathrm{L}, \forall \lambda \in \mathrm{K}, \quad & \mathrm{Tr}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\alpha + \lambda\beta) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\alpha) + \lambda\,\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\beta) \\ \forall \alpha, \beta \in \mathrm{L}, \quad & \mathrm{Nm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\alpha\beta) = \mathrm{Nm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\alpha)\,\mathrm{Nm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\beta). \end{aligned}$$
4. Soit M/L/K une tour de corps de nombres et $\alpha \in \mathrm{L}$. Montrer que
$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{M}/\mathrm{K}}(\alpha) = [\mathrm{M} : \mathrm{L}]\,\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\alpha) \text{ et } \mathrm{Nm}_{\mathrm{M}/\mathrm{K}}(\alpha) = \mathrm{Nm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\alpha)^{[\mathrm{M}:\mathrm{L}]}.$$
5. Soit K un corps de nombres et $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$. Montrer que le polynôme caractéristique de l'application K-linéaire $\mathrm{T}^{\mathrm{K}(\alpha)}_{\alpha}$ est le polynôme minimal de α sur K.
6. Soit L/K une extension de corps de nombres et $\alpha \in \mathrm{L}$. Montrer que
$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\alpha) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{L},\mathbf{C})} \sigma(\alpha) \text{ et } \mathrm{Nm}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}(\alpha) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{L},\mathbf{C})} \sigma(\alpha),$$
où $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{L}, \mathbf{C})$ est l'ensemble des plongements K-linéaires de L dans $\mathbf{C}$.
7. Montrer que si $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathrm{L}}$, $\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}/\mathbf{Q}}(\alpha)$ et $\mathrm{Nm}_{\mathrm{L}/\mathbf{Q}}(\alpha)$ sont des entiers.

8. Soit L un corps de nombres. Montrer qu'un élément $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathrm{L}}$ est une unité de $\mathcal{O}_{\mathrm{L}}$ si et seulement si $\mathrm{Nm}_{\mathrm{L}/\mathbf{Q}}(\alpha) = \pm 1$.
9. Soit d un entier sans facteur carré et $\mathrm{L} = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$. Déterminer la trace et la norme d'un élément $\alpha \in \mathrm{L}$. Montrer que $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathrm{L}}$ si et seulement si $\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}/\mathbf{Q}}(\alpha)$ et $\mathrm{Nm}_{\mathrm{L}/\mathbf{Q}}(\alpha)$ sont entiers.
10. Soit $d < 0$ un entier sans facteur carré et $\mathrm{L} = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$. Montrer que si $d \notin \{-1, -3\}$, alors $\mathcal{O}_{\mathrm{L}}^{\times} = \{\pm 1\}$. Que se passe-t-il si $d = -1$ ou $d = -3$?

Exercice 3. (Entiers des $\mathbf{Q}(\zeta_p)$)
Dans tout cet exercice, p est un nombre premier impair, $\zeta_p = e^{2i\pi/p}$ et $\mathrm{L} = \mathbf{Q}(\zeta_p)$. On note simplement $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{L}/\mathbf{Q}}$ et $\mathrm{Nm} = \mathrm{Nm}_{\mathrm{L}/\mathbf{Q}}$. Soit $\pi = 1 - \zeta_p$.

1. Calculer $\mathrm{Nm}(\pi)$ et $\mathrm{Tr}(\pi)$. Calculer également $\mathrm{Tr}(\zeta_p^j)$ en fonction de j.
2. On suppose que a et b sont des entiers premiers avec p. Montrer que $\dfrac{1-\zeta_p^a}{1-\zeta_p^b} \in \mathcal{O}_{\mathrm{L}}^{\times}$. En déduire que si $j \in \{1, \ldots, p-1\}$, π et $1-\zeta_p^j$ sont associés dans $\mathcal{O}_{\mathrm{L}}$ et que $p\mathcal{O}_{\mathrm{L}} = \pi^{p-1}\mathcal{O}_{\mathrm{L}}$.
3. Montrer que $\pi\mathcal{O}_{\mathrm{L}} \cap \mathbf{Z} = p\mathbf{Z}$. (On pourra remarquer que $\pi\mathcal{O}_{\mathrm{L}} \cap \mathbf{Z}$ est un idéal de $\mathbf{Z}$.)
4. Soit $x \in \mathrm{K}$ un élément écrit sous la forme $x = a_0 + a_1\zeta_p + \cdots + a_{p-2}\zeta_p^{p-2}$, où les a_i sont des coefficients rationnels.
   (a) Montrer que $\mathrm{Tr}(\pi x) = a_0 p$.
   (b) En utilisant la question 3, montrer que si $x \in \mathcal{O}_{\mathrm{L}}$, alors $\mathrm{Tr}(\pi x) \in p\mathbf{Z}$ et en déduire que $a_0 \in \mathbf{Z}$.
   (c) En déduire que si $x \in \mathcal{O}_{\mathrm{L}}$, les coefficients a_i sont entiers.
   (d) Déduire de ce qui précède que $\mathcal{O}_{\mathrm{L}} = \mathbf{Z}[\zeta_p]$.

Exercice 4. (Théorème de Kronecker)
Soit $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ de degré $d \geq 2$. On suppose que toutes les racines du polynôme minimal de α sont de module ≤ 1. On note $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{\alpha}^{\mathbf{Q}(\alpha)} \in \mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}(\alpha))$.

1. Démontrer que les coefficients du polynôme caractéristique P_n de T^n sont des nombres entiers de valeur absolue $\leq 2^d$.
2. En déduire que α est une racine de l'unité (théorème de Kronecker).
3. En considérant le nombre $\alpha = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$, montrer que le théorème de Kronecker est faux si l'on suppose simplement α algébrique.

Exercice 5. (Nombres de Pisot)
On appelle *nombre de Pisot* tout nombre réel $r > 1$ appartenant à $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ tel que les autres racines du polynôme minimal de r sur $\mathbf{Q}$ soient toutes de module < 1. Montrer que la distance de r^n à $\mathbf{Z}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.