Devoir à la maison

Les copies rendues avant le lundi 10 mars seront corrigées et disponibles le mercredi 12 mars. Afin de rendre l'exercice le plus intéressant possible, il vous est demandé de rédiger votre travail avec rigueur et soin.

Exercice 1.— Un exemple de sous-variété : les structures complexes

(a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que la donnée d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur E est équivalente à celle d'un endomorphisme $\mathrm{J} \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{id}$.

(b) On pose $\mathscr{J}(\mathrm{E}) = \left\{ \mathrm{J} \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \,\middle|\, \mathrm{J}^2 = -\mathrm{id} \right\}$. Montrer que c'est une sous-variété de l'espace vectoriel $\operatorname{End} \mathrm{E}$ des endomorphismes de E et déterminer sa dimension.

(c) Pour n entier, on peut voir $\mathbb{C}^n$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Cela donne un morphisme injectif de groupes $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \simeq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que, si E est de dimension $2n$, $\mathscr{J}(\mathrm{E})$ est homéomorphe à l'espace quotient $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \big/ \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Exercice 2.— La fibration de Hopf

On munit $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ des structures euclidiennes standard, et l'on considère la sphère unité dans chacun de ces espaces, soit

$$\mathrm{S}^3 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\} \ , \ \mathrm{S}^2 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + t^2 = 1\}.$$

(a) Donner des équations pour les espaces tangents $\mathrm{T}_{(x,y)}\mathrm{S}^3$ et $\mathrm{T}_{(z,t)}\mathrm{S}^2$.

(b) On définit $h(x, y) = (2\overline{x}y, |x|^2 - |y|^2)$ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Montrer que h induit une application $\mathrm{H} : \mathrm{S}^3 \to \mathrm{S}^2$ de classe C^∞ (cette application est la *fibration de Hopf*.) Montrer que H est une submersion c'est-à-dire que $d_z\mathrm{H} : \mathrm{T}_z\mathrm{S}^3 \to \mathrm{T}_{\mathrm{H}(z)}\mathrm{S}^2$ est partout surjective.

(c) Décrire les fibres $\mathrm{H}^{-1}(p)$, $p \in \mathrm{S}^2$.

Exercice 3.— Quelques remarques sur les applications polynomiales

Soit $f = \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ une application polynomiale.

(a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}^n, d_zf : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

(b) Si f est une submersion en z, montrer que $\mathrm{T}_z f^{-1}(f(z))$ est un sous-espace vectoriel complexe. De quelle dimension ?

(c) On suppose $m = 1$. Montrer que f est une submersion en z si et seulement si $d_zf \neq 0$.

(d) On suppose $n = 2$, $m = 1$, et $h : \mathrm{U} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et satisfaisant une équation implicite $f(z, h(z)) = 0$ où f est polynomiale et $d_{(z,h(z))}f$ ne s'annule pas. Montrer que d_zh est $\mathbb{C}$-linéaire, c'est-à-dire que h est holomorphe.

(e) À partir de maintenant, on suppose $n = 2$, $m = 1$ et $f(x, y) = x^3 - y^2$. On note $\mathrm{V}_c = f^{-1}(c) \subset \mathbb{C}^2$, $c \in \mathbb{C}$. Montrer que V_c est une surface de classe C^∞ si $c \neq 0$. Exhiber un C^∞-difféomorphisme de V_c sur $\mathrm{V}_{c'}$ si $c, c' \neq 0$.

(f) Montrer que $\mathrm{V}_0 \setminus \{(0, 0)\}$ est une surface de classe C^∞, que V_0 est homéomorphe à $\mathbb{C}$, mais n'est pas une surface de classe C^1.