Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1.— Parmi ces parties de $\mathbb{R}^n$, lesquelles sont des sous-variétés ?

(a) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy=0\right\}$;

(b) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2=y^2\right\}$;

(c) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\} \,\middle|\, x^2+y^2-z^2=0\right\}$;

(d) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2-z^2=0\right\}$;

(e) $\left\{(0,t) \,\middle|\, t\in\mathbb{R}_+\right\}\cup\left\{(t,0) \,\middle|\, t\in\mathbb{R}_+\right\}$;

(f) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y^2=x^3\right\}$.

Exercice 2.— Niveaux réguliers.

(a) Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et $c\in\mathbb{R}$. On suppose que le niveau de f correspondant ne contient pas de point critique : $\forall x\in f^{-1}(\{c\}), d_xf\neq 0$. Montrer que $f^{-1}(\{c\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa dimension.

(b) En déduire que les sphères des espaces euclidiens sont des sous-variétés.

(c) Dans le plan $\mathrm{P}=\{y=0\}\subset\mathbb{R}^3$, on note S le cercle de centre $(2,0,0)$ et de rayon 1. On note T la surface de révolution obtenue en faisant tourner S autour de l'axe vertical. Montrer que c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.— Sous-variétés produit.

(a) Montrer que, si M et N sont des sous-variétés respectives de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, alors $\mathrm{M}\times\mathrm{N}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{m+n}$.

(b) Montrer que le produit de deux cercles est homéomorphe à la sous-variété de l'exercice précédent.

Exercice 4.— Mesure d'une sous-variété. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On suppose que la dimension d de M est strictement inférieure à n. Montrer que la mesure de Lebesgue de M est nulle.

Exercice 5.— Classes d'équivalence. Étant donné une matrice $\mathrm{A}\in\mathrm{M}(n\times m,\mathbb{R})$, montrer que $\left\{\mathrm{PAQ} \,\middle|\, \mathrm{P}\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\mathrm{Q}\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})\right\}$ est une sous-variété de $\mathrm{M}(n\times m,\mathbb{R})$. On pourra démontrer et utiliser le fait que, si $\mathrm{A}\in\mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$, les matrices de $\mathrm{M}(n\times m,\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\mathrm{I}_r & 0\\ \mathrm{CA}^{-1} & \mathrm{D}-\mathrm{CA}^{-1}\mathrm{B}\end{pmatrix}$ sont équivalentes.