Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ (suite)

Exercice 1.— Intersection de deux sous-variétés : un exemple. Montrer que pour $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$, la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon R et le cylindre vertical de rayon 1 et d'axe $\left\{(1,0,z) \,\middle|\, z \in \mathbb{R}\right\}$ s'intersectent selon une courbe lisse.

Exercice 2.— Groupes classiques. Montrer que les groupes suivants sont des sous-variétés de $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$, auquel on pourra penser en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel) et déterminer leur dimension :

(a) le groupe général linéaire $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) = \left\{\mathrm{M} \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \,\middle|\, \text{dét}\,\mathrm{M} \neq 0\right\}$;

(b) le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = \left\{\mathrm{M} \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \,\middle|\, \text{dét}\,\mathrm{M} = 1\right\}$.

(c) le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n) = \left\{\mathrm{M} \in \mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^t\mathrm{M}\mathrm{M} = \mathrm{id}\right\}$;

(d) le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$;

(e) le groupe unitaire $\mathrm{U}(n) = \left\{\mathrm{M} \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \,\middle|\, {}^t\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M} = \mathrm{id}\right\}$;

(f) le groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(n) = \left\{\mathrm{M} \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \,\middle|\, {}^t\overline{\mathrm{M}}\mathrm{M} = \mathrm{id} \text{ et } \text{dét}\,\mathrm{M} = 1\right\}$;

(g) le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R}) = \left\{\mathrm{M} \in \mathrm{M}(2n,\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^t\mathrm{M}\mathrm{J}\mathrm{M} = \mathrm{J}\right\}$, où

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & -1 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2n,\mathbb{R}).$$

Identifier $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$.