Calcul différentiel sur les sous-variétés (suite)

Exercice 1.— Droites du tore.
On identifie le tore $\mathrm{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ à la sous-variété $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$ de $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ via l'application bijective $(u \mod 1, v \mod 1) \mapsto (e^{2i\pi u}, e^{2i\pi v})$. On appelle *droite de pente* α l'application

$$\Delta_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathrm{T}^2 \\ t & \mapsto & (t, \alpha t) \end{array}.$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Δ_α soit injective. Montrer que dans le cas contraire, elle définit par passage au quotient une application lisse $\overline{\Delta}_\alpha : \Gamma \to \mathrm{T}^2$, où Γ est un cercle.

(b) Montrer que Δ_α est une immersion. Démontrer que dans le cas évoqué plus haut, l'application $\overline{\Delta}_\alpha : \Gamma \to \mathrm{T}^2$ est également une immersion. En déduire que $\overline{\Delta}_\alpha$ est un plongement.

(c) Démontrer que Δ_α n'est pas un plongement.

Exercice 2.— Soit $f : \mathrm{V} \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable définie sur une sous-variété V de dimension d de $\mathbb{R}^n$. On suppose que le rang de f est constant $r = \mathrm{rg}(d_x f : \mathrm{T}_x\mathrm{V} \to \mathbb{R}^p)$. Montrer que les niveaux $f^{-1}\{p\}$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension $d - r$. En guise d'application, redémontrer que $\mathrm{SU}(n)$ est une sous-variété de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et déterminer sa dimension.

Exercice 3.— Stabilité des points réguliers et de Morse
Soit Λ un espace vectoriel de dimension finie et $f : \Lambda \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lisse. On pourra penser à f comme une famille de fonctions lisses en posant, pour $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda(x) = f(\lambda, x)$.

(a) On suppose que 0 n'est pas un point critique de f_0. Montrer que pour λ suffisamment petit, f_λ n'a pas de point critique proche de 0.

(b) On suppose que f_0 a en 0 un point critique de Morse. Montrer que pour λ assez petit, f_λ a au voisinage de 0 un unique point critique $a(\lambda)$. Montrer que ce point critique est de Morse, et que la fonction $\lambda \mapsto a(\lambda)$ est lisse.

(c) Peut-on généraliser ce résultat quand 0 est un point critique dégénéré de f_0 ? Quand il est isolé ?

Exercice 4.— Recherche de points critiques
Déterminer les points critiques de $\mathrm{tr} : \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.