Comportement asymptotique

Exercice 1.— Embryon de théorie de Morse
Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $f^{-1}([a,b])$ est compact et ne contient pas de point critique de f. Montrer que $f^{-1}(\{a\})$ et $f^{-1}(\{b\})$ sont des sous-variétés difféomorphes.

Exercice 2.— Points presque critiques
Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$. Montrer qu'il existe une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d_{x_n}f$ tende vers 0.

Exercice 3.— Alpha et oméga-limite
Soit X un champ de vecteurs complet de flot (φ^t). On définit

$$\alpha(x) = \bigcap_{T<0} \overline{\left\{\varphi^t(x) \,\middle|\, t \leqslant T\right\}} \tag{1}$$

$$\omega(x) = \bigcap_{T>0} \overline{\left\{\varphi^t(x) \,\middle|\, t \geqslant T\right\}}. \tag{2}$$

(a) Démontrer que les points $y \in \omega(x)$ (resp. $\alpha(x)$) sont ceux tels qu'il existe une suite $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (resp. $-\infty$) vérifiant $\varphi^{t_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} y$.

(b) Montrer que $\alpha(x)$ et $\omega(x)$ sont des ensembles invariants par le flot. Si on suppose en outre que l'orbite est fermée, montrer que ce sont des compacts connexes non vides.

(c) Donner des exemples où $\omega(x)$ est vide, un point, une courbe, une sous-variété de dimension quelconque, un fermé qui n'est pas une sous-variété.

Exercice 4.— Dynamique au voisinage d'un cycle limite. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit X le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$X(x,y) = (y, -x) + (x^2+y^2-1)(1+\lambda x^2)(x,y).$$

(a) Montrer que $\varphi^t_X(x,y)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ si $x^2+y^2 \leq 1$.

(b) Écrire l'équation en polaires (là où cela a un sens).

On veut préciser le comportement dynamique au voisinage de l'orbite périodique $\gamma(t) = (-\cos t, \sin t)$.

(c) Pour $u > 0$, on note $P(u)$ l'abscisse du premier point où la trajectoire issue de $(u, 0)$ retraverse l'axe des x (si un tel point existe). On dit que l'application P est une *application de premier retour.*

– Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que P soit bien définie sur $]0, 1+\varepsilon[$.

- D'après la question (b), on peut écrire $\varphi_{\mathrm{X}}^{t}(u,0)$ sous la forme $\mathrm{R}(u,t)e^{-it}$ pour tous u et t tels que $\varphi_{\mathrm{X}}^{t}(u,0)$ soit défini.

  On note $f(t) = \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}(1,t)$. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire. Préciser la condition initiale.
- Quel est le lien entre P et R ?
- Déduire de ce qui précède la valeur de $\mathrm{P}'(1)$. Quelle est l'interprétation géométrique de ce nombre ?