Correction de l'exercice 7 - feuille TD3

Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$ et que l'ensemble des Lebesguiens est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Pour simplifier, nous répondrons aux questions dans l'ordre suivant :

1. Tout espace métrique complet séparable X est analytique.
2. Toute réunion ou intersection dénombrable de sous-espaces analytiques de $\mathbb{R}$ est analytique.
3. Tout fermé et tout ouvert de $\mathbb{R}$ est analytique.
4. Tout borélien est analytique.
5. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est équipotent à $\mathbb{R}$.
6. $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

<u>Tout espace métrique complet séparable (X, d) est analytique.</u>

On rappelle que dans un espace métrique complet, toute intersection décroissante de fermés non vide est réduite à un point. Ainsi, toute intersection de fermés est soit vide soit réduite à un point. Soit (X, d) une espace métrique complet séparable non vide et soit $x_0 \in X$. La séparabilité de X implique que pour tout $i \in \mathbb{N}$, X est réunion dénombrable de fermés de diamètre plus petit que $1/2^i$ (par exemple les boules fermées de rayon $1/2^i$ centrées en des points d'une partie dense dénombrable) qu'on notera $(F_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$. Pour une suite $x = (n_j)_j \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, on pose

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} F_{j,n_j} = \{\phi(x)\}$$

si cette intersection est non vide et $\phi(x) = x_0$ sinon. Ceci définit une application

$$\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X.$$

Si $(x^p) = (n_j^p)_j \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ converge vers $x = (n_j^\infty)_j \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, notons $y = \phi(x)$. Notons $E = \cap_j F_{j,n_j^\infty}$. Si $E = \emptyset$, alors par complétude de X, il existe un entier j tel que $\cap_{0\leq i\leq j} F_{i,n_i^\infty} = \emptyset$. Pour p assez grand, les j premières composantes de x^p sont les mêmes que celles de x et donc $\phi(x^p) = \phi(x) = x_0$. Si E est non vide, soit $j \in \mathbb{N}$. Pour p assez grand, les j premières composantes de x^p sont les mêmes que celles de x et donc

$$\phi(x), \phi(x^p) \in \bigcap_{i=0}^{j} F_{j,n_j^\infty},$$

d'où pour p assez grand $d(\phi(x), \phi(x^p)) \leq 1/2^j$. Ceci montre la continuité de ϕ. La surjectivité de ϕ a lieu par construction des fermés Fi, j :

$$\forall i,\ X = \bigcup_j F_{i,j}.$$

<u>Toute réunion ou intersection dénombrable de sous-espaces analytiques de $\mathbb{R}$ est analytique.</u>

Soit X_i des parties analytiques de $\mathbb{R}$ et ϕ_i les surjections continues correspondantes ($i \in \mathbb{N}$). On définit

$$\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \cup_{i\in\mathbb{N}} X_i$$

par $\psi(n_0, n_1, \ldots) = \phi_{n_0}(n_1, n_2, \ldots)$. Puisque

$$\forall j \in \mathbb{N}, \psi(\{j\} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \phi_j(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = X_j,$$

ψ est surjective. Si $k^n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ converge vers $k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, alors pour n assez grand $k_0^n = k_0$ donc

$$\psi(k^n) = \phi_{k_0}(k_1^n, k_2^n, \ldots).$$

Ce terme converge, par continuité de ϕ_{k_0} vers $\phi_{k_0}(k_1, k_2, \ldots) = \psi(k)$, d'où la continuité de ψ. Ainsi, la réunion des X_i est analytique. Pour l'intersection considérons

$$f : (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to \prod_i X_i$$

définie par $f_i = \phi_i$ pour tout i. Par définition de la topologie produit sur $\prod_i X_i$, f est continue car chacune de ses projections f_i l'est. Puisque $\cap_i X_i$ est homéomorphe à la diagonale de $\prod_i X_i$, qui est fermée, et que $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ est homéomorphe à $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, il s'ensuit que $\cap_i X_i$ est homomorphe à un sous espace fermé de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Comme $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est complet, ce sous espace est complet donc analytique d'après la première question. Il s'ensuit que $\cap_i X_i$ est homéomorphe à un espace analytique, donc clairement analytique.

Toute fermé et tout ouvert de $\mathbb{R}$ est analytique

En effet, tout fermé de $\mathbb{R}$ est complet, donc analytique, et tout ouvert est réunion dénombrable de fermés, donc analytique d'après la question précédente.

Tout borélien est analytique

On dira qu'une famille de parties de $\mathbb{R}$ est de type "alpha" si elle est stable par intersection et réunion dénombrable et contient les ouverts et les fermés. Une intersection quelconque d'ensembles de type "alpha" est de type "alpha". On peut donc considérer la plus petite partie de type "alpha", qu'on note A. Clairement $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour la réciproque, montrons que A est une tribu. Il suffit de voir que A est stable par complémentaire. Soit

$$H = \{E \in A,\ \ E^c \in A\}.$$

H est stable par intersection et réunion dénombrable, puisque le passage au complémentaire transforme réunion en intersection, et vice-versa. D'autre part H contient les ouverts et les fermés puisque le complémentaire d'un ouvert est un fermé et réciproquement. Donc H est de type "alpha", et donc contient A. Ceci montre que A est stable par complémentaire : ainsi A est une tribu. Ceci montre que $A = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Enfin, la classe des ensembles analytiques étant de type "alpha", il s'ensuit que tout borélien est analytique.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est équipotent à $\mathbb{R}$

Soit A une partie dense et dénombrable de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Alors une application continue de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est caractérisée pas ses valeurs sur A. On en conclut que si $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties analytiques de $\mathbb{R}$,

$$Card(\mathcal{A}) \leq Card(C^0(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R})) \leq Card(\mathbb{R}^A) = Card(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = card(\mathbb{R}).$$

(ici, $Card$ désigne le cardinal, dans le sens où, si X et Y sont deux ensembles, $card(X) \leq card(Y)$ ssi il existe une injection de X dans Y, ie, il existe une surjection de Y sur X). D'autre par $\mathcal{A}$ contient tous les singletons $\{x\}, x \in \mathbb{R}$, donc

$$Card(\mathbb{R}) \leq Card(\mathcal{A}).$$

Ainsi

$$Card(\mathbb{R}) = Card(\mathcal{A}).$$

<u>$\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$</u>

Soit K l'ensemble triadique de Cantor construit dans le TD 2. K est un borélien de mesure nulle, donc tout partie de K est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Or K est équipotent à $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{P}(K)$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. D'où

$$Card(\mathcal{P}(\mathbb{R})) \leq Card(\mathcal{L}(\mathbb{R})).$$

L'inégalité inverse est évidente, d'où

$$Card(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = Card(\mathcal{L}(\mathbb{R})).$$