Correction (exercices 7 et 8)

Exercice 7 : tribus sur les ensembles dénombrables

Soit $\mathscr{T}$ une tribu sur un ensemble dénombrable. On définit la relation d'équivalence $\equiv$ sur X par :

$$x \equiv y \Longleftrightarrow (\forall \mathrm{A} \in \mathscr{T}, x \in \mathrm{A} \Leftrightarrow y \in \mathrm{A}),$$

c'est-à-dire que x et y sont équivalents si et seulement s'ils appartiennent exactement aux mêmes ensembles mesurables. On va montrer, en utilisant le fait que X est dénombrable, que la tribu engendrée par la relation d'équivalence $\equiv$ et $\mathscr{T}$ coïncident.

Montrons d'abord que $\mathscr{T}$ est incluse dans la tribu engendrée par $\equiv$: soit $\mathrm{A} \in \mathscr{T}$. Rappelons que l'ensemble noté $\mathrm{X}/\!\equiv$ est par définition l'ensemble des classes de $\equiv$. On peut écrire de manière tautologique : $\mathrm{A} = \bigsqcup_{\mathrm{C} \in \mathrm{X}/\equiv} (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$. Or, s'il existe $\mathrm{C} \in \mathrm{X}/\!\equiv$ tel que $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ n'est ni C tout entier, ni réduit au vide, on peut trouver $x, y \in \mathrm{C}$ tels que $x \in \mathrm{A}$ et $y \notin \mathrm{A}$. Mais cela contredit l'hypothèse $x, y \in \mathrm{C}$, qui implique $x \equiv y$.

Ainsi, pour tout $\mathrm{C} \in \mathrm{X}/\!\equiv$, on a soit $\mathrm{C} \cap \mathrm{A} = \mathrm{C}$, soit $\mathrm{C} \cap \mathrm{A} = \varnothing$[1] et l'on peut donc écrire $\mathrm{A} = \bigsqcup_{\mathrm{C} \in \mathrm{I}} \mathrm{C}$, où I est l'ensemble des classes C telles que $\mathrm{C} \subset \mathrm{A}$. Puisque X est dénombrable, $\mathrm{X}/\!\equiv$ et I le sont aussi, et l'on a bien l'appartenance de A à la tribu engendrée par $\equiv$. La tribu engendrée par $\equiv$ contient donc $\mathscr{T}$.

Pour montrer l'inclusion réciproque, soit $x \in \mathrm{X}$. On va montrer que la classe d'équivalence de $\equiv$ contenant x appartient à la tribu $\mathscr{T}$. Pour chaque $y \in \mathrm{X}$, on définit l'ensemble $\mathrm{A}_{x,y}$ comme suit : si $x \equiv y$, on pose $\mathrm{A}_{x,y} = \mathrm{X}$ tout entier ; si $x \not\equiv y$, la définition implique que l'on peut trouver un ensemble $\mathrm{A} \in \mathscr{T}$ tel que $x \in \mathrm{A}$ mais $y \notin \mathrm{A}$ et l'on choisit un tel ensemble pour $\mathrm{A}_{x,y}$. Notons que dans ce dernier cas, $y \notin \mathrm{A}_{x,y}$. L'ensemble $\bigcap_{y \in \mathrm{X}} \mathrm{A}_{x,y}$ est alors par construction restreint à la classe de x et il appartient à la tribu $\mathscr{T}$ car X est dénombrable. On a donc bien démontré que $\mathscr{T}$ est engendré par la relation d'équivalence $\equiv$.

La tribu pleine $\mathscr{P}(\mathrm{X})$ est engendrée par la relation d'équivalence la plus fine qui soit $(x \equiv y \Leftrightarrow x = y)$ alors que la tribu triviale $\{\varnothing, \mathrm{X}\}$ est engendrée par la relation la plus grossière $(\forall x, y \in \mathrm{X}, x \equiv y)$.

La propriété précédente montre qu'il y a autant de tribus sur un ensemble fini que de partitions. Le nombre de partitions sur un ensemble à n éléments est le *n-ème nombre de Bell* B_n, que l'on peut par exemple calculer à l'aide de la relation de récurrence : $\mathrm{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_k$. Les premiers nombres de Bell (à partir de B_0) sont : 1, 1, 2, 5, 15, 52, etc.

[1] Autrement dit, A est réunion de classes d'équivalence, ce qui est équivalent à l'implication $x \in \mathrm{A} \Rightarrow \forall y \equiv x, y \in \mathrm{A}$. On dit aussi que l'ensemble A est *saturé* sous la relation d'équivelence $\equiv$.

Les classes d'équivalence de la relation $\equiv$ sont parfois appelées les *atomes* de la tribu, c'est-à-dire, conformément à l'étymologie, les parties que la tribu ne peut pas découper. Le résultat de cet exercice implique donc que sur un ensemble dénombrable, il n'y a qu'une tribu *sans atome* (i.e. dont les atomes sont les singletons) : la tribu pleine $\mathscr{P}(\mathrm{X})$. Notons que nous avons déjà rencontré un avatar de ce théorème quand nous avons démontré que $\mathscr{B}(\mathbb{Q}) = \mathscr{P}(\mathbb{Q})$. En revanche, quand X n'est plus dénombrable, ce résultat devient faux : il y a beaucoup de tribus sans atome différentes, par exemple $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 8 : tribus dénombrables

Suivant l'indication, commençons par démontrer le résultat intermédiaire suivant.

Lemme. — Soit $\mathscr{T}$ une tribu infinie. Il existe alors une famille infinie d'ensembles disjoints dans $\mathscr{T}$.

Pour démontrer cela, prenons une famille infinie $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{T}$. On va découper ces ensembles le plus possible (en restant dans $\mathscr{T}$). Pour ce faire, définissons, pour $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ un ensemble

$$\mathrm{B}_\omega = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_{\omega_i,i}, \quad \text{où } \mathrm{B}_{1,i} = \mathrm{A}_i \text{ et } \mathrm{B}_{0,i} = \mathrm{X}\setminus \mathrm{A}_i.$$

Par définition, ces ensembles sont disjoints (si $\omega \neq \omega'$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_i \neq \omega'_i$ et $\mathrm{B}_\omega \subset \mathrm{A}_i$ tandis que $\mathrm{B}_{\omega'} \subset \mathrm{X}\setminus\mathrm{A}_i$, ou réciproquement) et membres de la tribu $\mathscr{T}$. Le prix à payer est que l'on récupère ainsi le plus souvent un ensemble vide.

Par exemple, si la famille dénombrable de départ est celle des intervalles dyadiques, les (B_ω) sont soit des points, soit vides.

Il nous reste à démontrer que parmi cette multitude (non dénombrable !) de B_ω, une infinité ne sont pas réduits à $\varnothing$. Pour cela, remarquons que tout élément de la famille de départ s'écrit comme une réunion (a priori non dénombrable) de B_ω :

$$\mathrm{A}_i = \bigsqcup_{\omega \text{ tq } \omega_i = 1} \mathrm{B}_\omega.$$

Ainsi, si seulement un nombre fini de B_ω n'étaient pas vides, l'on ne pourrait reconstituer en les assemblant qu'un nombre fini de (A_i) ce qui contredirait l'hypothèse de départ. Le lemme est ainsi démontré.

Une fois le lemme démontré, il nous reste à voir pourquoi cela implique que la tribu ne peut pas être dénombrable. Il suffit de voir qu'une famille infinie d'ensembles disjoints (et non vides) $(\mathrm{C}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ permet de définir une famille non dénombrable d'éléments de $\mathscr{T}$. Ainsi, on peut construire pour tout $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$ une partie $\mathrm{D}_\mathrm{I} = \bigsqcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{C}_i$. Puisque les C_i sont disjoints, les D_I sont tous différents, et ils sont indexés par l'ensemble des parties $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, qui est non dénombrable. Tout tribu infinie a donc un cardinal indénombrable.