σ-algèbres

Exercice 1.— Limites inférieures et supérieures d'ensembles
Soit $\mathscr{A}$ une σ-algèbre sur un ensemble X et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathscr{A}$. On définit les ensembles :

$$\limsup_n \mathrm{A}_n = \left\{ x \in \mathrm{X} \,\middle|\, x \text{ appartient à une infinité de } \mathrm{A}_n \right\}$$
$$\liminf_n \mathrm{A}_n = \left\{ x \in \mathrm{X} \,\middle|\, x \in \mathrm{A}_n \text{ à partir d'un certain } n \right\}.$$

Montrer que $\liminf_n \mathrm{A}_n$ et $\limsup_n \mathrm{A}_n$ sont membres de la σ-algèbre $\mathscr{A}$. Donner des exemples intelligents où ces deux ensembles coïncident ainsi que des exemples où ils diffèrent.

Exercice 2.— Quelques boréliens de $\mathbb{R}$
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants sont boréliens :

(a) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\}$;

(b) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \right\}$;

(c) $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet 0 comme valeur d'adhérence} \right\}$.

Exercice 3.— Boréliens de $\mathbb{Q}$
Montrer que la σ-algèbre des boréliens $\mathscr{B}(\mathbb{Q})$ coïncide avec la σ-algèbre pleine $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$. Généraliser au cas d'un espace métrique dénombrable.

Exercice 4.— Un exemple d'espace métrique et ses boréliens
Soit $\mathrm{X} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

(a) Montrer que la fonction d définie par $d((x_n)_n, (y_n)_n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$ définit une distance sur X.

(b) Montrer que l'espace métrique $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est complet, séparable et compact.

(c) On appelle *cylindre* un ensemble de la forme $\mathrm{A}_0 \times \cdots \times \mathrm{A}_n \times \displaystyle\prod_{i\geqslant n+1} \{0,1\}$, où les $\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_n$ sont des parties de $\{0,1\}$. Montrer que les unions finies de cylindres forment une algèbre que l'on notera $\mathscr{C}$.

(d) Montrer que la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{C}$ coïncide avec la σ-algèbre des boréliens de X (on pourra démontrer que, dans un espace métrique séparable, la tribu borélienne est engendrée par les boules).

Exercice 5.— σ-algèbre produit

Soit $(\mathrm{X}_1, \mathscr{A}_1)$ et $(\mathrm{X}_2, \mathscr{A}_2)$ deux espaces mesurables (*i.e.* ensembles munis d'une σ-algèbre). On définit la *σ-algèbre produit* $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ comme la σ-algèbre engendrée ;

$$\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 = \sigma\left(\left\{ \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \,\middle|\, \mathrm{A}_i \in \mathscr{A}_i \right\}\right).$$

On note $\mathscr{D}(\mathrm{X})$ la σ-algèbre des parties dénombrables ou codénombrables d'un ensemble X et $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ la σ-algèbre borélienne d'un espace métrique X.

(a) Montrer que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

(b) Soit X et Y deux ensembles. Dans quels cas a-t-on $\mathscr{D}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) = \mathscr{D}(\mathrm{X}) \otimes \mathscr{D}(\mathrm{Y})$?

Exercice 6.— Intervalles dyadiques

On appelle *intervalle dyadique* de $[0, 1[$ un intervalle de la forme $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$, où $n \in \mathbb{N}$ et k est un entier compris entre 0 et $2^n - 1$.

(a) Montrer que deux intervalles dyadiques sont emboîtés ou disjoints.

(b) Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}$ des unions finies d'intervalles dyadiques est une algèbre sur $[0, 1[$.

(c) Montrer que la σ-algèbre engendrée par les intervalles dyadiques est la σ-algèbre borélienne $\mathscr{B}([0, 1[)$.

Exercice 7.— σ-algèbres sur les ensembles dénombrables

Soit X un ensemble dénombrable. On dit qu'une σ-algèbre est engendrée par une relation d'équivalence si elle est engendrée par les classes d'équivalence de cette relation.

(a) Montrer que toute σ-algèbre est engendrée par une relation d'équivalence. Identifier les relations correspondant aux σ-algèbres pleine et triviale.

(b) En déduire le nombre de σ-algèbres sur un ensemble fini.

Exercice 8.— σ-algèbres dénombrables

Démontrer qu'il n'existe pas de σ-algèbre infinie dénombrable. On pourra commencer par montrer que l'on peut toujours trouver dans une σ-algèbre infinie une collection infinie d'ensembles disjoints.