Mesures

Exercice 1.— Mesures sur $\mathbb{Q}$
Trouver toutes les mesures sur $(\mathbb{Q}, \mathscr{B}(\mathbb{Q}) = \mathscr{P}(\mathbb{Q}))$.

Exercice 2.— Lemme de Borel–Cantelli, première partie

Soit $(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mu[\mathrm{A}_n]$ est finie. Montrer que l'ensemble des points qui appartiennent à une infinité de A_n est de mesure nulle.

Exercice 3.— Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$: vrai ou faux ?
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. On demande, suivant les cas, une preuve ou un contre-exemple.
- Soit (A_n) une suite décroissante de boréliens de $\mathbb{R}$ d'intersection vide. Alors $m_1[\mathrm{A}_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide. Alors $m_1[\mathrm{A}] = 0$.
- Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Alors $m_1[\mathrm{A}] > 0$.
- Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Alors $m_1[\mathrm{K}]$ est finie.

Exercice 4.— Sommes de mesures de Dirac
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

(a) Montrer que $\mu = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_n}$ définit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

(b) Montrer que μ est finie sur tous les intervalles bornés si et seulement si $|x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

(c) Pour quelles suites la mesure μ est-elle σ-finie ?

Exercice 5.— Exemple de Vitali
Soit $\sim$ la relation d'équivalence définie par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Justifier que chaque classe rencontre l'intervalle $[0, 1]$. On forme l'ensemble V en prenant dans chaque classe d'équivalence un représentant dans $[0, 1]$. On obtient donc une partie $\mathrm{V} \subset [0, 1]$ intersectant en un unique point chaque classe d'équivalence de $\sim$. Montrer que V n'est pas borélien.

Exercice 6.— Ensembles de Cantor

(a) On définit *l'ensemble triadique de Cantor* K_3 de la manière suivante : $\mathrm{K}_3^{(0)}$ est l'intervalle $[0, 1]$, $\mathrm{K}_3^{(1)}$ est obtenu en découpant $\mathrm{K}_3^{(0)}$ en trois intervalles de même taille et en ne gardant que les deux intervalles (fermés) extrêmes ($\mathrm{K}_3^{(1)} = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$), $\mathrm{K}_3^{(2)}$ est obtenu en faisant subir le même sort aux (deux) intervalles constituant $\mathrm{K}_3^{(1)}$ ($\mathrm{K}_3^{(2)} = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$). On construit ainsi par récurrence des compacts $\mathrm{K}_3^{(n)}$ formés de 2^n intervalles. Ces compacts sont emboîtés et on pose $\mathrm{K}_3 = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_3^{(n)}$. Calculer la mesure de Lebesgue de l'ensemble triadique de Cantor.

FIG. 1 – K_3 : premières étapes de construction (source : wikipédia)

(b) On généralise la construction précédente : pour n'importe quelle suite de nombres $\lambda_n \in]0,1[$, on définit les compacts $K^{(n)}$ par récurrence en partant de $K^{(0)} = [0,1]$ et en passant de $K^{(n)}$ à $K^{(n+1)}$ en ôtant à chacun des 2^n intervalles I formant $K^{(n)}$ l'intervalle ouvert central de longueur $\lambda_n \cdot m_1[\mathrm{I}]$. On pose enfin $\mathrm{K} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_n$. L'exemple de la question précédente correspond à la suite constante $\forall n, \lambda_n = 1/3$. Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1[$, on peut construire par ce procédé un compact de mesure α.

(c) Montrer que les compacts précédents ont la puissance du continu (c'est-à-dire, on le rappelle, qu'ils sont en bijection avec $\mathbb{R}$ ou $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$).

Exercice 7.— Propriétés d'invariance de la mesure de Lebesgue

(a) Montrer que la mesure de Lebesgue m_n sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par translation.

(b) Soit μ une mesure définie sur $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ invariante par translation et telle que $\mu\left[[0,1]^n\right] = \lambda < \infty$. Montrer que $\mu = \lambda m_n$.

(c) Soit E un borélien de $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme. Montrer que

$$m_n\left[\mathrm{A}(\mathrm{E})\right] = |\,\mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{A}| \cdot m_n[\mathrm{E}].$$

(d) Soit $\mathrm{E} = \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \max_{[0,1]} |f|$. Montrer qu'il n'existe pas sur E de mesure μ non nulle vérifiant les propriétés suivantes :
- μ est invariante par translation ;
- Tout point $p \in \mathrm{E}$ admet un voisinage de μ-mesure finie.