Tribus borélienne et cylindrique

Le but est de démontrer que sur $\mathrm{X} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la distance $d(x,y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$, la tribu borélienne coïncide avec la tribu cylindrique qui est, par, définition, engendrée par les cylindres élementaires $\mathrm{C}_{a_0,\ldots,a_n} = \left\{x \in \mathrm{X} \,\middle|\, \forall i \leqslant n, x_i = a_i\right\}$. On rappelle que X est séparable et compact (donc complet).[1]

Tout d'abord, démontrons que la tribu cylindrique est incluse dans la tribu borélienne. Pour cela, il suffit de montrer que les cylindres élémentaires sont boréliens. En fait, l'application de troncature

$$\mathrm{T}_\mathrm{N} : \begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \to & \{0,1\}^{\mathrm{N}+1} \\ x & \mapsto & (x_0, x_1, \ldots, x_\mathrm{N}) \end{array}$$

est continue (si on munit l'espace $\{0,1\}^{\mathrm{N}+1}$ de la distance $d(x,y) = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} 2^{-i}|x_i - y_i|$, par exemple, elle est même 1-lipschitzienne) et toutes les parties de $\{0,1\}^{\mathrm{N}+1}$ sont des ouverts (et des fermés)[2] donc $\mathrm{C}_{x_0,\ldots,x_n} = \mathrm{T}_n^{-1}\{(a_0,\ldots,a_n)\}$ est un ouvert (et un fermé), donc un borélien.

On veut maintenant démontrer que la tribu borélienne est incluse dans la tribu cylindrique. Pour cela, on va utiliser le lemme vu en TD selon lequel, dans un espace métrique séparable, la tribu borélienne est engendrée par les boules (en fait, la preuve en TD a été rédigée pour des boules ouvertes et on va l'utiliser pour des boules fermées, mais la preuve est la même, *mutatis mutandis*). Commençons par un échauffement.

Mise en jambes : les boules de rayon 2^{-n}

Nous allons décrire la boule fermée $\mathrm{B}_f(x, 2^{-n})$. Si y est à distance inférieure à 2^{-n} de x, alors les coordonnées $y_0, \ldots, y_{n-1}$ de y doivent coïncider avec celles de x (si $x_i \neq y_i$, alors $d(x,y) \geqslant 2^{-i}$. Il nous reste alors deux façons de rester à distance inférieure ou égale à 2^{-n} de x :

– garder intact le i-ème bit de x ($x_i = y_i$) ; on peut alors changer arbitrairement tous les autres bits de y (si $\forall i \leqslant n, x_i = y_i$, alors $d(x,y) \leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} 2^{-i} = 2^{-n}$) ;

– changer le i-ème bit de x ($y_i = 1 - x_i$) ; on a alors « dépensé » toute la distance autorisée et on est obligé de ne plus changer aucun bit c'est-à-dire d'obtenir la suite x' définie par $x'_n = 1 - x_n$ et, pour $i \neq n$, $x'_i = x_i$.

[1] Pour beaucoup, les espaces métriques complets constituent le bon cadre de la théorie de la mesure. En hommage à l'école polonaise de topologie d'avant-guerre, de tels espaces sont appelés *polonais*.

[2] On dit que la distance *définit la topologie discrète*.

Ainsi, $\mathrm{B}(x, 2^{-n}) = \mathrm{C}_{x_0,\dots,x_n} \cup \{x'\}$ et ces boules sont dans la tribu cylindrique ; rappelons que tout singleton $\{x\}$ est dans la tribu cylindrique, car c'est l'intersection dénombrable des cylindres définis par ses premières coordonnées : $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{C}_{x_0,\dots,x_n}$.

Pour conclure la preuve, je propose deux méthodes différentes : soit décrire complètement les boules (ce qui peut être utile par ailleurs) en généralisant ce qui vient d'être dit, soit améliorer le lemme pour montrer que la tribu borélienne peut être engendrée par les seules boules de rayon de la forme 2^{-n}.

Première preuve : décrire toutes les boules

En généralisant l'approche suivie durant la mise en jambes, on va décrire toutes les boules $\mathrm{B}_f(x,r)$. Si $r \geqslant 2$, $\mathrm{B}_f(x,r)$ est X tout entier, évidemment dans la tribu cylindrique. Supposons donc $r < 2$ et écrivons le développement dyadique de r : $r = \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} r_i$. S'il y a deux développements possibles (c'est-à-dire si r est dyadique, *i.e.* de la forme $k \cdot 2^{-n}$), on choisit le développement propre (nul à partir d'un certain rang) ; ainsi, on écrit $1 = 2^{-0}$ et pas $1 = \sum_{i>0} 2^{-i}$.

Si r est nul, la boule fermée se restreint à son centre, et appartient à la tribu cylindrique. Sinon, au premier rang i tel que $r_i = 1$ ($r = 2^{-i} + r'$, avec $r' < 2^{-i}$), deux choix s'offrent à nous :

- garder intact le i-ème bit de x ($y_i = x_i$) ; on peut alors changer arbitrairement tous les autres bits de y ;
- changer le i-ème bit de x ($y_i = 1 - x_i$) ; on a alors « dépensé » une distance de 2^{-i}.

Ainsi, $\mathrm{B}_f(x,r) = \Gamma \cup \mathrm{B}_f(x', r')$, où Γ est le cylindre $\mathrm{C}_{x_0,\dots,x_i}$ et x' est la suite coïncidant avec x partout sauf au i-ème bit.

Si r est dyadique de la forme $r = 2^{-i_1} + \dots + 2^{-i_\mathrm{N}}$, avec $i_1 < \ldots < i_\mathrm{N}$, on arrive ainsi par récurrence à la description $\mathrm{B}_f(x,r) = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{\mathrm{N}-1} \cup \{\bar{x}\}$, où Γ_1 est le cylindre $\mathrm{C}_{x_0,\dots,x_{i_1}}$, Γ_2 est le cylindre $\mathrm{C}_{x_0,\dots,1-x_{i_1},\dots,x_{i_2}}$, Γ_3 est le cylindre $\mathrm{C}_{x_0,\dots,1-x_{i_1},\dots,1-x_{i_2},\dots,x_{i_3}}$, etc. et $\bar{x}$ est la suite obtenue en changeant les bits de position $i_1, \dots i_\mathrm{N}$ de x.

Dans le cas où r n'est pas dyadique, on note $i_1, \dots, i_n, \dots$ les positions où le développement dyadique de r vaut 1. On obtient pour tout n une description analogue au cas précédent : $\mathrm{B}_f(x,r) = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{n-1} \cup \mathrm{B}_f\left(x^{(n)}, r^{(n)}\right)$, où $x^{(n)}$ est la suite obtenue en changeant les bits de position $i_1, \dots, i_n$ de x et $r^{(n)} = \sum_{k>n} 2^{-i_k}$ est « le reste » du développement dyadique de r. À la limite, la boule fermée s'écrit donc comme l'union d'un nombre dénombrable de cylindres (Γ_i) et du singleton $\{\bar{x}\}$ (où $\bar{x}$ est obtenu en changeant les bits de position $i_1, \dots, i_n, \dots$ de x) qui est l'intersection des boules $\mathrm{B}_f\left(x^{(n)}, r^{(n)}\right)$.

Dans tous les cas, la boule fermée appartient à la tribu cylindrique, et les deux tribus coïncident.

Deuxième preuve : améliorer le lemme

La tribu borélienne est engendrée par les boules de rayon 2^{-n}.

En fait, il n'y a presque rien à dire : la preuve donnée en TD s'adapte sans grande difficulté.

Soit D un ensemble dénombrable dense dans X. On va démontrer que les boules (fermées) centrées en des points de D et de rayon 2^{-n}, qui sont fermées donc boréliennes, suffisent à engendrer la tribu borélienne. Notons $\mathscr{M}$ leur ensemble.

Pour cela, soit O un ouvert, On va montrer que O est l'union des boules de $\mathscr{M}$ qu'il contient. On a l'inclusion évidente $\bigcup\limits_{\mathrm{B}\in\mathscr{M}} \mathrm{B} \subset \mathrm{O}$, dont le premier membre est dans la tribu engendrée par les boules de rayon 2^{-n}, il ne reste donc qu'à montrer l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \mathrm{O}$. Soit $r > 0$ tel que O contienne la boule fermée $\mathrm{B}_f(x, r)$. Soit $y \in \mathrm{D}$ un point proche de x ; on va montrer que si y est suffisamment proche de x, x est contenue dans une boule centrée en y et incluse dans O : si $z \in \mathrm{B}_f(x, 2d(x, y))$, on a $d(y, z) \leqslant d(y, x) + d(x, z)$, soit $d(y, z) \leqslant 3d(x, y)$. Ainsi, si $y \in \mathrm{D}$ est tel que $d(x, y) < \dfrac{r}{3}$ (et tel que $2d(x, y)$ est plus petit que 1), la boule fermée de rayon $2d(x, y)$ et centrée en y contient x et est incluse dans $\mathrm{B}_f(x, r)$, et donc dans O. On peut en dire autant de la boule de même centre et de rayon compris entre $d(x, y)$ et $2d(x, y)$, par exemple le nombre de la forme 2^{-n} compris entre ces deux réels (plus petits que 1). On a donc bien trouvé une boule de $\mathscr{M}$ contenant x et la propriété est démontrée.

La tribu borélienne est donc engendrée par ces boules que l'on sait dans la tribu cylindrique, et les deux tribus coïncident.

Ultime remarque

En fait, tout ceci aurait été grandement simplifié si on avait choisi comme distance la distance *dyadique* (ou *2-adique*) définie par :

$$d(x, y) = 2^{-p} \quad \text{où } p = \max\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \forall i \leqslant n, x_i = y_i\right\}.$$

On peut vérifier que c'est une distance (en fait d'inégalité triangulaire, elle vérifie même la condition plus forte $d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z))$, c'est-à-dire qu'elle est *ultramétrique*), et qu'elle définit la même topologie que la distance que nous avons utilisée, mais cette fois, boules et cylindres élémentaires coïncident vraiment, ce qui rend la discussion plus aisée. Je vous invite à refaire l'exercice avec cette nouvelle distance.