TD de révision : vrai ou faux ?

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. On justifiera chaque réponse par une preuve ou un contre-exemple.

1. L'intersection de deux tribus est une tribu. L'union de deux tribus est une tribu.
2. $\mathscr{P}(\mathrm{X})$ est la seule tribu sur un ensemble X fini qui contienne les singletons. Même affirmation pour X dénombrable, X non dénombrable.
3. Soit $(\mathrm{E}, \mathscr{A})$ un espace mesurable et $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est mesurable si et seulement si $\forall r \in \mathbb{Q}, \left\{x \in \mathrm{E} \,\middle|\, f(x) > r\right\} \in \mathscr{A}$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive. Alors $f : (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.
5. Soit $g : (\mathrm{E}, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f \circ g$ est mesurable.
6. Soit μ une mesure de probabilité sans atome sur $[0,1]$ (*i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}_+, \mu(\{x\}) = 0$) et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une partition $[0,1] = \mathrm{A}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{A}_n$ telle que $\mu(\mathrm{A}_i) = 1/n$.
7. Soit $f : (\mathrm{X}, \mathscr{A}) \to (\mathrm{Y}, \mathscr{B})$ une application mesurable, μ une mesure sur $(\mathrm{X}, \mathscr{A})$ et $\nu = f_*(\mu)$. Alors $\mu(\mathrm{X}) = \nu(\mathrm{Y})$.
8. Réciproquement, soit $(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu)$ et $(\mathrm{Y}, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés tels que $\mu(\mathrm{X}) = \nu(\mathrm{Y})$. Alors il existe $f : (\mathrm{X}, \mathscr{A}) \to (\mathrm{Y}, \mathscr{B})$ mesurable telle que $\nu = f_*(\mu)$.
9. Soit $(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mathrm{card})$. Alors toute application mesurable $f : (\mathrm{X}, \mathscr{A}) \to (\mathrm{X}, \mathscr{A})$ telle que $f_*(\mu) = \mu$ est bijective. Même affirmation pour $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$.
10. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable sur un espace mesuré (E, μ). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda\left(\left\{x \in \mathrm{E} \,\middle|\, |f(x)| > \mathrm{N}\right\}\right) < \varepsilon$. Même question si $\mu(\mathrm{E}) < +\infty$.
11. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur un espace mesuré (E, μ). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda\left(\left\{x \in \mathrm{E} \,\middle|\, |f(x)| > \mathrm{N}\right\}\right) < \varepsilon$. Même question si $\mu(\mathrm{E}) < +\infty$.
12. Soit (E, μ) un espace mesuré et $(f_n : \mathrm{E} \to (\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Alors $\displaystyle\int_{\mathrm{E}} \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathrm{E}} f_n \, d\mu$.
13. Sous les mêmes hypothèses, $\displaystyle\int_{\mathrm{E}} \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathrm{E}} f_n \, d\mu$.
14. Sous les mêmes hypothèses, $\displaystyle\int_{\mathrm{E}} \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathrm{E}} f_n \, d\mu$.
15. Sous les mêmes hypothèses, $\displaystyle\int_{\mathrm{E}} \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathrm{E}} f_n \, d\mu$.
16. Soit (E, μ) un espace mesuré et $(f_n : \mathrm{E} \to (\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant en décroissant vers $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\int_{\mathrm{E}} f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathrm{E}} f$. Même question si l'on suppose f_1 intégrable.

17. Soit (E, μ) un espace mesuré et $(f_n : \mathrm{E} \to (\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant vers une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par valeurs inférieures. Alors $\displaystyle\int_{\mathrm{E}} f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathrm{E}} f$.
18. Un ensemble mesurable $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$ est borné si et seulement s'il est de mesure de Lebesgue finie.
19. Un ouvert $\mathrm{O} \subset \mathbb{R}^n$ non vide est de mesure de Lebesgue strictement positive.
20. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert dense $\mathrm{O} \subset \mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue au plus ε.
21. Un compact $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^n$ est de mesure de Lebesgue finie.
22. Un compact $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^n$ est d'intérieur vide si et seulement s'il est de mesure nulle.
23. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Si $\mathrm{N} \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable, alors $f[\mathrm{N}]$ aussi. Même affirmation pour f continûment différentiable.
24. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Si $\mathrm{N} \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable, alors $f^{-1}[\mathrm{N}]$ aussi. Même affirmation pour f continûment différentiable.
25. Il existe des ensembles $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ non mesurables tels que $\lambda^*(\mathrm{A}) = 0$.
26. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des ensembles $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ non mesurables tels que $\lambda^*(\mathrm{A}) \leq \varepsilon$.
27. Soit $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable non négligeable. Alors E contient un ensemble non mesurable.
28. Soit $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ un ensemble négligeable et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres strictement positifs. On peut recouvrir E par des intervalles $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda(\mathrm{I}_n) < \varepsilon_n$.
29. Soit $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boréliens de $[0, 1]$. On suppose qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda(\mathrm{E}_n) \geq \mathrm{C}$. Alors il existe une sous-famille infinie des E_n dont l'intersection est de mesure non nulle.
30. Soit $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boréliens de $[0, 1]$. On suppose qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda(\mathrm{E}_n) \geq \mathrm{C}$. Alors il existe une sous-famille infinie des E_n dont l'intersection est non vide.
31. Soit μ une mesure sur $([0, 1], \mathscr{B}([0, 1]))$ telle que
$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{B}([0, 1]), \lambda(\mathrm{A}) = 1/2 \Rightarrow \mu(\mathrm{A}) = 1/2.$$
Alors $\mu = \lambda$.
32. Soit (X, μ) un espace mesuré fini. Alors toute suite bornée dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$ admet une sous-suite convergente.
33. $\mathrm{L}^1([0, 1]) \subset \mathrm{L}^2([0, 1])$.
34. Si $1 \leq p < q$, alors $\mathrm{L}^q([0, 1]) \subset \mathrm{L}^p([0, 1])$.
35. Si une suite converge dans $\mathrm{L}^p([0, 1])$ alors elle converge presque partout.
36. Soit $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués, f dans $\mathrm{L}^p([0, 1])$ et g dans $\mathrm{L}^q([0, 1])$ respectivement. Alors $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$ si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que $\alpha|f| = \beta|g|$ presque partout.