TD 0 : dénombrabilité

Exercice 1.— Dénombrabilité : vrai ou faux

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1. l'ensemble $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$; l'ensemble $\mathscr{P}_\omega(\mathbb{N})$ des parties dénombrables de $\mathbb{N}$; l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$;
2. l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites entières ; l'ensemble $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, l'ensemble $\mathrm{B} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites stationnaires ;
3. l'ensemble $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ des bijections de $\mathbb{N}$ dans lui-même ; l'ensemble $\mathfrak{S}_0(\mathbb{N})$ des bijections de $\mathbb{N}$ dans lui-même coïncidant avec l'identité en dehors d'un ensemble fini.

Exercice 2.— Famille sommable

Soit I un ensemble et $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de réels strictement positifs. On dit que $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est *sommable* si l'ensemble

$$\left\{ \sum_{j\in\mathrm{J}} a_j \;\middle|\; \mathrm{J} \subset \mathrm{I} \text{ fini} \right\}$$

admet un supremum. Montrer que si $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est sommable, I est dénombrable.

Exercice 3.— Boîte à outils topologique

Dans cet exercice, $\mathbb{R}^n$ est muni de son unique topologie d'espace vectoriel normé.

1. Soit $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjoints. Montrer que I est dénombrable.
2. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une union dénombrable de boules. Montrer qu'on peut même se limiter aux boules *rationnelles* (c'est-à-dire dont le rayon est un rationnel strictement positif et le centre dans $\mathbb{Q}^n$).
3. On dit qu'un ensemble $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$ est un F_σ si c'est une union dénombrable de fermés et un G_δ si [1] c'est une intersection dénombrable d'ouverts. Montrer que tout fermé est un G_δ et que tout ouvert est un F_σ mais que les réciproques de ces deux propriétés sont fausses.
4. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est *σ-compact*, c'est-à-dire qu'il est une union dénombrable de compacts.
5. Montrer que l'espace $(\mathrm{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est *séparable*, c'est-à-dire qu'il contient une partie dénombrable dense.
6. Trouver un exemple d'espace vectoriel normé non séparable.

1. F pour « fermé » et σ pour « somme » ; G pour l'allemand « *Gebiet* » et δ pour « *Durchschnitt* »

Exercice 4.— Points de discontinuité

1. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dénombrable. Donner un contre-exemple si f n'est plus supposée croissante.
2. Montrer que l'ensemble des points de non-dérivabilité d'une fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dénombrable.
3. On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *réglée* si, sur tout segment, elle est limite uniforme de fonctions en escalier. Montrer que si f est réglée alors elle admet des limites à gauche et à droite en tout point puis que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dénombrable.