TD 1 : correction

Exercice 1.— Limites inférieure et supérieure d'ensembles

Il s'agit d'écrire $\limsup_n \mathrm{A}_n$ et $\liminf_n \mathrm{A}_n$ à l'aide des (A_n) et d'unions et d'intersections dénombrables.
On a directement

$$\liminf_n \mathrm{A}_n = \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant n_0} \mathrm{A}_n,$$

ce qui montre $\liminf_n \mathrm{A}_n \in \mathscr{A}$.
Pour la limite supérieure, nous allons traduire « x appartient à une infinité de A_n » par : « il existe des n arbitrairement grands tels que x appartienne à A_n. » Ainsi,

$$\limsup_n \mathrm{A}_n = \bigcap_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant n_0} \mathrm{A}_n$$

est encore un élément de $\mathscr{A}$.
Ces ensembles coïncident par exemple quand la suite d'ensembles (A_n) est décroissante (pour l'inclusion). Dans ce cas, $\bigcap_n \mathrm{A}_n = \liminf_n \mathrm{A}_n = \limsup_n \mathrm{A}_n$, alors qu'en général ces deux égalités sont des inclusions strictes.
Si $\mathrm{A}_0 = \varnothing$, et que A_n est le segment d'extrémités 0 et $(-1)^n$ pour $n > 0$, alors

$$\underbrace{\bigcap_n \mathrm{A}_n}_{\varnothing} \subsetneq \underbrace{\liminf_n \mathrm{A}_n}_{\{0\}} \subsetneq \underbrace{\limsup_n \mathrm{A}_n}_{[-1,1]}.$$

Exercice 2.— Quelques boréliens de $\mathbb{R}$

Comme dans l'exercice précédent, il s'agit de traduire les propriétés définissant ces ensembles en termes d'intersections et d'unions (ou, si l'on préfère, de quantificateurs universels $\forall$ et existentiels $\exists$) portant sur des ensembles dénombrables.

1. La seule difficulté est que la définition de convergence d'une suite (y_n) commence par « $\forall\varepsilon > 0$, » quantification portant sur un ensemble non dénombrable. Toutefois, on sait bien qu'elle se traduit également par

$$y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0, -\frac{1}{k} \leqslant y_n \leqslant \frac{1}{k}.$$

   Ainsi, appliquée en $y_n = f_n(x)$, cette définition permet de voir que

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant n_0} f_n^{-1}\left(\left[-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right]\right) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \liminf_n f_n^{-1}\left(\left[-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right]\right).$$

   Comme f_n est continue, les $f_n^{-1}([-1/k,1/k])$ sont fermés, et $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right\}$, intersection dénombrable d'unions dénombrables d'intersections dénombrables de fermés, est un borélien de $\mathbb{R}$.

2. Comme précédemment, $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet 0 comme valeur d'adhérence}\right\}$ s'écrit

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant n_0} f_n^{-1}\left(\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]\right) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \limsup_n f_n^{-1}\left(\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]\right)$$

   est un borélien de $\mathbb{R}$.

3. Ce dernier exemble est plus subtil car « (y_n) converge » signifie « $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que (x_n) converge vers ℓ » et on ne voit pas très bien comment se débarrasser de la quantification non dénombrable « $\exists \ell \in \mathbb{R}$. » L'astuce est d'utiliser la complétude de $\mathbb{R}$ pour remplacer la condition de convergence par la condition de Cauchy. On a donc

$$\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\right\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{n_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{\substack{p\geqslant n_0\\ q\geqslant n_0}} \mathrm{F}_{p,q}^{-1}\left(\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]\right),$$

   où $\mathrm{F}_{p,q}(x) = f_p(x) - f_q(x)$ définit une fonction continue. L'ensemble est donc bien borélien.

Exercice 3.— Boréliens de $\mathbb{Q}$

Tautologiquement $\mathscr{B}(\mathbb{Q}) \subset \mathscr{P}(\mathbb{Q})$. Réciproquement, soit $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathbb{Q})$. On a évidemment $\mathrm{A} = \bigcup_{x\in\mathrm{A}}\{x\}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il en va de même de A et cette décomposition est une union dénombrable. Le point $\{x\}$ est fermé, donc $\{x\} \in \mathscr{B}(\mathbb{Q})$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{B}(\mathbb{Q})$.
La preuve s'étend manifestement sans effort à tout espace topologique dénombrable *dont les points sont fermés*. C'est assurément le cas d'un espace métrique dénombrable ou plus généralement d'un espace topologique séparé dénombrable. [1]

Exercice 4.— Tribu engendrée par une partition

Nous traitons directement le cas où X *est un ensemble dénombrable.*

1. Nous allons démontrer que les éléments de $\mathscr{A}$ sont exactement les unions d'éléments de la partition $\mathscr{P} = (\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$:

$$\mathscr{A} = \left\{\mathrm{A_J} = \bigcup_{i\in\mathrm{J}} \mathrm{A}_i \,\middle|\, \mathrm{J} \subset \mathrm{I}\right\}.$$

   Déjà, l'ensemble I est dénombrable : par définition d'une partition, tout élément $x \in \mathrm{X}$ appartient à un unique A_i ; cela définit une surjection $\mathrm{X} \twoheadrightarrow \mathrm{I}$. Ainsi, tout $\mathrm{A_J}$ est une union dénombrable de A_i, ce qui prouve qu'il est membre de la tribu $\mathscr{A}$.
   En outre, $\left\{\mathrm{A_J} \,\middle|\, \mathrm{J} \subset \mathrm{I}\right\}$ est stable par union, intersection et passage au complémentaire :

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{A}_{\mathrm{J}_\lambda} = \mathrm{A}_{\bigcup \mathrm{J}_\lambda} \qquad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{A}_{\mathrm{J}_\lambda} = \mathrm{A}_{\bigcap \mathrm{J}_\lambda} \qquad \mathrm{X} \setminus \mathrm{A_J} = \mathrm{A}_{\mathrm{I}\setminus\mathrm{J}},$$

   ce qui montre l'inclusion réciproque.

1. Ces derniers peuvent déjà être assez surprenants. Par exemple, il en existe des connexes !

2. Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur un ensemble X dénombrable.
   On définit la relation d'équivalence $\equiv$ sur X par :

$$x \equiv y \Longleftrightarrow (\forall \mathrm{A} \in \mathscr{A}, x \in \mathrm{A} \Leftrightarrow y \in \mathrm{A}),$$

   c'est-à-dire que x et y sont équivalents si et seulement s'ils appartiennent exactement aux mêmes ensembles mesurables. Les classes d'équivalence pour $\equiv$ forment une partition $\mathscr{P}$. Convenons de noter $[x] \in \mathscr{P}$ la classe d'équivalence de $x \in \mathrm{X}$.
   Remarquons que ces classes d'équivalence sont des éléments de $\mathscr{A}$: par définition, si $x \in \mathrm{X}$, on a pour tout élément $y \notin [x]$ (c'est-à-dire pour tout élément $y \not\equiv x$) l'existence d'un ensemble $\mathrm{A}_{x,y} \in \mathscr{A}$ tel que $x \in \mathrm{A}_{x,y}$ mais $y \notin \mathrm{A}_{x,y}$. On peut alors réécrire $[x]$ comme une intersection dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$:

$$[x] = \bigcap_{y \notin [x]} \mathrm{A}_{x,y},$$

   ce qui prouve $[x] \in \mathscr{A}$.
   Cela démontre déjà que la tribu $\mathscr{A}$ contient la tribu engendrée par les A_i.
   Remarque. C'est le point où l'hypothèse de finitude de X permet de simplifier le raisonnablement. Par définition, $[x]$ est l'intersection des ensembles mesurables contenant x. Dans le cas où X est un ensemble dénombrable, cela ne permet pas de justifier de la mesurabilité de $[x]$, car l'ensemble des parties mesurables contenant x n'est *a priori* pas dénombrable. En revanche, si X est fini, cet ensemble de parties est lui-même fini et l'argument précédent est inutile.
   Les A_i sont des éléments non vides de $\mathscr{A}$ minimaux pour cette propriété. En particulier, si $\mathrm{B} \in \mathscr{A}$, on a soit $\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i = \varnothing$, soit $\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i = \mathrm{A}_i$ (c'est-à-dire $\mathrm{A}_i \subset \mathrm{B}$). En particulier, tout ensemble $\mathrm{B} \in \mathscr{A}$ s'écrit

$$\mathrm{B} = \bigcup_{b \in \mathrm{B}} [b].$$

   Cette union étant dénombrable, cela démontre que tout élément de $\mathscr{A}$ est dans la tribu engendrée par $\mathscr{P}$.
   La tribu $\mathscr{A}$ est donc engendrée par la partition $\mathscr{P}$.
   Remarque. La dénombrabilité de X a permis deux choses :
   – de construire des *atomes*, c'est-à-dire des éléments de $\mathscr{A}$ non vides minimaux : *a priori*, dans une tribu quelconque, on pourrait imaginer qu'il existe une infinité non dénombrable d'éléments tous inclus les uns dans les autres dont l'intersection n'est pas un élément de $\mathscr{A}$.
   – d'écrire tout ensemble mesurable comme réunion dénombrable des atomes qu'il contient, c'est-à-dire de prouver que la tribu est engendrée par ses atomes.
   Remarquons que la tribu borélienne sur un ensemble métrique quelconque a des atomes : il suffit de prendre les points.
   La deuxième propriété prouve entre autres que sur un ensemble dénombrable, il existe une seule tribu dont les atomes soient les singletons : la tribu pleine $\mathscr{P}(\mathrm{X})$. Notons que nous avons déjà rencontré un avatar de ce théorème quand nous avons démontré que $\mathscr{B}(\mathbb{Q}) = \mathscr{P}(\mathbb{Q})$. En revanche, quand X n'est plus dénombrable, il devient facile de trouver des tribus différentes possédant ces propriétés : par exemple, $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

3. La propriété précédente montre qu'il y a autant de tribus sur un ensemble fini que de partitions. Le nombre de partitions sur un ensemble à n éléments est le *n-ème nombre de Bell* B_n, que l'on peut par exemple calculer à l'aide de la relation de récurrence : $\mathrm{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_k$. Pour obtenir une formule pour les (B_n), on peut considérer leur *série génératrice exponentielle*

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{n!} \mathrm{X}^n.$$

Puisque les (B_n) sont clairement croissants, la relation d'équivalence fournit l'inégalité $\mathrm{B}_{n+1} \leqslant (n+1)2^n \mathrm{B}_n$, ce qui entraîne que la série entière précédente a un rayon de convergence strictement positif, et définit donc bien une fonction lisse sur un voisinage de 0.

La formule de récurrence permet alors de montrer que G vérifie l'équation différentielle $\mathrm{G}' = \exp(\mathrm{X}) \cdot \mathrm{G}$, puis, comme $\mathrm{G}(0) = 1$, on obtient l'expression :

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}) = \exp(\exp(\mathrm{X}) - 1)$$

L'identification terme à terme des coefficients dans l'expression ci-dessus montre alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Les premiers nombres de Bell (à partir de B_0) sont [2] :

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4\,140, 21\,147, 115\,975, 678\,570, 4\,213\,597, 27\,644\,437, 190\,899\,322 \ldots$$

Exercice 5.— Intervalles dyadiques

1. Soient deux intervalles dyadiques $\mathrm{I} = \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right[$ et $\mathrm{J} = \left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right[$.

   On suppose $m \geqslant n$ et on réécrit :

$$\mathrm{J} = \left[\frac{\ell 2^{m-n}}{2^m}, \frac{(\ell+1)2^{m-n}}{2^m}\right[$$

   – Si $\ell 2^{m-n} \leqslant k < (\ell+1)2^{m-n}$, alors $\mathrm{I} \subset \mathrm{J}$
   – Sinon, $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \emptyset$

2. Tout d'abord, $\emptyset \in \mathscr{A}$.

   Ensuite, remarquons que si $(\mathrm{I}_i)_{i=1}^{r}$ est une famille finie d'intervalles dyadiques, il existe n tel que tous les I_i soient de taille 2^{-m} avec $m \leqslant n$. En subdivisant chacun de ces intervalles en 2^{n-m} intervalles de taille 2^{-n}, on obtient donc que toute union finie d'intervalles dyadiques est une union finie d'intervalles dyadiques *de la même taille.*

2. Les nombres de Bell sont la suite `A000110` de l'*On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, cf. `http://oeis.org/A000110`.

De la même façon, si U et V sont deux éléments de $\mathscr{A}$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{I}, \mathrm{J} \subset [\![0, 2^n - 1]\!]$ tels que

$$\mathrm{U} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right[\qquad \mathrm{V} = \bigcup_{j \in \mathrm{J}} \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right[.$$

On voit alors facilement que $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ et $[0,1[\setminus \mathrm{V}$ sont encore des éléments de $\mathscr{A}$:

$$\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \bigcup_{k \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[\qquad [0,1[\setminus \mathrm{U} = \bigcup_{i \in [\![0, 2^n-1]\!] \setminus \mathrm{I}} \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right[.$$

Puisque $\mathscr{A}$ est tautologiquement stable par union finie, c'est bien une algèbre sur $[0,1[$.

3. Il faut d'abord montrer que les intervalles dyadiques sont des boréliens : ceci est évident car tout intervalle dyadique s'écrit sous la forme

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[= \left[0, \frac{k+1}{2^n}\right[\setminus \left[0, \frac{k}{2^n}\right[.$$

Différence de deux ouverts, c'est donc un borélien de $[0,1[$.
Ensuite, on utilise le fait que la tribu borélienne est engendrée par les boules de $[0,1[$. Il s'agit donc de montrer que toute boule (ouverte) de $[0,1[$ est dans la tribu engendrée par les intervalles dyadiques. Celles-ci sont de la forme $[0,s[$ pour $s \in [0,1[$ ou $]r,s[$ pour $r, s \in [0,1[$. Dans le premier cas, on peut trouver $q_n \in \mathbb{N}$ tel que $q_n/2^n$ converge vers s par valeurs inférieures. On a alors

$$[0,s[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{q_n}{2^n}\right[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in [\![0, q_n - 1]\!]} \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right[.$$

Dans le deuxième cas, on peut trouver un entier p_n (resp. q_n) tel que $p_n/2^n$ (resp. $q_n/2^n$) converge vers r (resp. s) par valeurs strictement supérieures (resp. inférieures). On a alors

$$]r,s[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{p_n}{2^n}, \frac{q_n}{2^n}\right[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in [\![p_n, q_n - 1]\!]} \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right[.$$

Dans les deux cas, la boule est bien dans la tribu engendrée par les boréliens, et le résultat cherché est démontré.

Exercice 6.— Tribu cylindrique

1. Évidemment, si $x = (x_n) = (y_n) = y$, la définition de d doit être entendue avec la convention suivante (qui est la seule raisonnable) :

$$d(x,y) = 2^{-\min\{i \in \mathbb{N} \,|\, x_i \neq y_i\}} = 2^{-\min \varnothing} = 2^{-\infty} = 0.$$

On voit alors directement que d est symétrique et que $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

Pour l'inégalité triangulaire, remarquons que si x et y coïncident jusqu'au rang j et que y et z coïncident jusqu'au rang k, alors x et z coïncident au moins jusqu'au rang $\min(j,k)$. On a donc

$$\min\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq z_i\} \geqslant \min\left(\min\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq y_i\}, \min\{i \in \mathbb{N} \mid y_i \neq z_i\}\right)$$

ce qui implique

$$d(x,z) = 2^{-\min\{i\in\mathbb{N} \mid x_i \neq z_i\}} \leqslant \max\left(2^{-\min\{i\in\mathbb{N} \mid x_i\neq y_i\}}, 2^{-\min\{i\in\mathbb{N} \mid y_i\neq z_i\}}\right) = \max(d(x,y), d(y,z)).$$

Cette inégalité, plus forte que l'inégalité triangulaire, s'appelle *inégalité ultramétrique.* Les espaces métriques vérifiant cette propriété sont très intéressants, quoiqu'un peu surprenants (tous les triangles sont isocèles ; dans un espace vectoriel ultramétrique, une série converge dès que son terme général tend vers 0...).

2. Commençons par une remarque importante. Si log désigne le logarithme en base 2, on a, pour $x \in \mathrm{X}$ et $r > 0$:

$$\mathrm{B}(x,r) = \left\{ (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall i \leqslant \lfloor -\log r \rfloor, y_i = x_i \right\} = \mathrm{C}(x_0, x_1, \ldots, x_{\lfloor -\log r\rfloor}).$$

Cela signifie, en anticipant sur la terminologie de la question précédente, que *les boules (ouvertes) de* X *sont exactement les cylindres.*

Commençons par démontrer la séparabilité. Soit D l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{X}$ dont presque tous les termes sont nuls. Cet ensemble est dénombrable, et il rencontre tous les cylindres :

$$(a_0, a_1, \ldots, a_r, 0, 0, \ldots) \in \mathrm{C}(a_0, a_1, \ldots, a_r) \cap \mathrm{D}.$$

C'est donc une partie dense et X est séparable.

Montrons la complétude. Soit $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (X, d), où $x^{(m)} = (x_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la condition de Cauchy, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow d(x^{(p)}, x^{(q)}) < 2^{-n}$. En particulier, pour tout $q \geqslant \mathrm{N}$, on doit avoir $\forall i \in [\![0,n]\!], x_i^{(q)} = x_i^{(\mathrm{N})}$: toutes les suites $(x_n^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite $x_n^\infty \in \{0,1\}$, ce qui définit un élément $x^\infty \in \mathrm{X}$.

Soit maintenant $k > 0$. D'après ce qui précède, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow \forall i \in [\![0,k]\!], x_i^{(m)} = x_i^\infty$, ce qui implique $d(x^{(m)}, x^\infty) \leqslant 2^{-(k+1)}$. On a donc démontré

$$x^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{(\mathrm{X},d)} x^\infty$$

et l'espace (X, d) est bien complet.

Deux pistes pour démontrer la compacité :

(a) En anticipant un peu sur le cours de topologie : soit $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. On veut montrer que $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ possède une suite extraite convergente.
   - Le zéroième bit $(x_0^{(m)})$ est une suite de 0 et de 1. On peut donc trouver une application strictement croissante $\phi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite réelle $(x_0^{(\phi_0(m))})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_0 \in \{0,1\}$ (ce qui revient à demander qu'elle soit stationnaire, mais cela n'intervient pas ici).

– Maintenant, on travaille sur la suite $(x^{(\phi_0(m))})_{m\in\mathbb{N}}$ dont le zéroième bit converge. Son premier bit $(x_1^{(\phi_0(m))})_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de 0 et de 1 : il existe donc une application strictement croissante $\phi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite extraite $(x_1^{(\phi_0(\phi_1(m)))})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_1 \in \{0,1\}$. Puisque $(x^{(\phi_0(\phi_1(m)))})_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(x^{(\phi_0(m))})_{m\in\mathbb{N}}$, son zéroième bit $(x_0^{(\phi_0(\phi_1(m)))})_{m\in\mathbb{N}}$ converge toujours vers l_0.

– Maintenant, on travaille sur la suite $(x^{(\phi_0(\phi_1(m)))})_{m\in\mathbb{N}}$. Son deuxième bit $(x_2^{(\phi_0(\phi_1(m)))})_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de 0 et de 1...

Par récurrence, on construit une suite $\phi_0,\ \phi_1,\ \phi_2\ldots$ d'applications strictement croissantes et leurs composées $\psi_k = \phi_0\circ\phi_1\circ\cdots\circ\phi_k$ telles que les $(k+1)$ premiers bits de la suite extraite $(x^{(\psi_k(m))})_{m\in\mathbb{N}}$ convergent vers $l_0,\ldots,l_k$. Ces limites définissent une suite $l = (l_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathrm{X}$. Vient alors l'astuce de *l'extraction diagonale* : soit

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \psi_n(n). \end{array}$$

Ψ est une application strictement croissante, et on vérifie sans difficulté que la suite extraite $(x^{(\Psi(m))})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathrm{X}$, ce qui achève la preuve.

(b) En anticipant beaucoup sur le cours de topologie : comme on l'a vu, boules et cylindres coïncident. Cela implique que la topologie définie par d et la topologie produit ont des bases d'ouverts égales : elles sont égales. D'après le théorème de Tíxonov, (X, d) est donc compact.

3. La preuve est très semblable à celle donnée pour les intervalles dyadiques. Convenons d'appeler *longueur* du cylindre $\mathrm{C}(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ l'entier naturel r.
Un cylindre $\mathrm{C}(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ se décompose en 2^{s-r} cylindres de longueur $s \geqslant r$:

$$\mathrm{C}(a_0, a_1, \ldots, a_r) = \bigcup_{(a_{r+1},\ldots,a_s)\in\{0,1\}^{s-r}} \mathrm{C}(a_0, a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_s).$$

En particulier, une union finie de cylindres est une union finie de cylindres de même longueur r, c'est-à-dire un ensemble de la forme

$$\mathrm{E}(n, \mathrm{I}) = \bigcup_{(a_0,\ldots,a_r)\in\mathrm{I}} \mathrm{C}(a_0, \ldots, a_r) \qquad \text{où } \mathrm{I} \subset \{0,1\}^{r+1}.$$

De même, deux tels ensembles peuvent toujours s'écrire $\mathrm{E}(r, \mathrm{I})$ et $\mathrm{E}(r, \mathrm{J})$, pour un même $r \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{I}, \mathrm{J} \subset \{0,1\}^{r+1}$. Les formules suivantes, évidentes, montrent alors que les unions finies de cylindres forment bien une algèbre

$$\mathrm{E}(r, \mathrm{I}) \cap \mathrm{E}(r, \mathrm{J}) = \mathrm{E}(r, \mathrm{I} \cap \mathrm{J}) \qquad \mathrm{X} \setminus \mathrm{E}(r, \mathrm{I}) = \mathrm{E}(r, \{0,1\}^{r+1} \setminus \mathrm{I}).$$

4. Dans un espace métrique, la tribu engendrée par les boules est la tribu borélienne. Qu'elle soit incluse dans la tribu borélienne est évident (les boules sont des boréliens !) et l'inclusion réciproque provient du fait, démontré dans le troisième exercice du TD 0, que tout ouvert est une réunion dénombrable de boules. Les ouverts sont donc des éléments de la tribu engendrée par les boules, ce qui entraîne que la tribu borélienne, par définition engendrée par les ouverts, soit incluse dans la tribu engendrée par les boules.
Dans notre cas, nous avons vu que boules et cylindres coïncidaient. La tribu borélienne sur X est donc bien engendrée par les cylindres.

Exercice 7.— Tribu produit

1. Munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)$.

   Nous avons vu (TD 0, exercice 3, deuxième question) que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une union dénombrable de boules ouvertes. Cela avait la conséquence importante que la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ est engendrée par les boules.

   Dans notre cas, la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$ est donc engendrée par les boules ouvertes

$$\mathrm{B}((x,y),r) =]x-r, x+r[\times]y-r, y+r[\,.$$

   Mais ces boules sont des produits d'ouverts ! Ainsi, chaque boule de $\mathbb{R}^2$ appartient à la tribu produit $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Cette tribu produit contenant toutes les boules, elle contient la tribu qu'elles engendrent. On a donc démontré l'inclusion

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

   Montrons l'inclusion réciproque. Il s'agit de montrer que tout ensemble de la forme

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} \subset \mathbb{R}^2,\ (\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$$

   est un borélien de $\mathbb{R}^2$.

   Lemme. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\mathrm{A} \times \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.

   Preuve du lemme.— Le point-clef est que

$$\mathscr{T} = \left\{ \mathrm{X} \subset \mathbb{R} \,\middle|\, \mathrm{X} \times \mathbb{R} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) \right\}$$

   est une tribu, ce que l'on vérifie aisément.

   Vérifions-le, par acquit de conscience :
   - Si $\mathrm{X} = \varnothing$, $\mathrm{X} \times \mathbb{R} = \varnothing$ est bien un borélien.
   - Si $\mathrm{X} \in \mathrm{T}$, on a $(\mathbb{R} \setminus \mathrm{X}) \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathrm{X} \times \mathbb{R})$. Par hypothèse, $\mathrm{X} \times \mathbb{R}$ est borélien, donc son complémentaire l'est également. Cela montre que $\mathbb{R} \setminus \mathrm{X} \in \mathscr{T}$.
   - De même, si $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathscr{T}$, on a

$$\left(\bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i \right) \times \mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} (\mathrm{X}_i \times \mathbb{R}).$$

     Chacun des éléments de l'union étant borélien, l'union l'est aussi, ce qui montre que l'union des (X_i) est dans $\mathscr{T}$.

   La tribu $\mathscr{T}$ contient les ouverts : si $\mathrm{O} \subset \mathbb{R}$ est ouvert, $\mathrm{O} \times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et en particulier un borélien. La tribu $\mathscr{T}$ contient les ouverts, elle contient donc les boréliens, ce qui démontre le lemme.

   Remarque. On peut aussi démontrer le lemme très rapidement, en disant « la projection $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue, donc c'est une application mesurable de l'espace mesurable $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ vers $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et les $\mathrm{A} \times \mathbb{R} = \mathrm{pr}_1^{-1}[\mathrm{A}]$ sont boréliens. » C'est évidemment parfaitement exact. Remarquons cependant que la preuve du fait que les applications continues sont boréliennes utilise un résultat dont la preuve est très proche de celle que nous venons de faire.

Pour achever la preuve, remarquons que la symétrie du problème entraîne également que pour tout $\mathrm{B} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathrm{B}$ est borélien. On conclut alors la preuve en utilisant la formule ensembliste suivante :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = (\mathrm{A} \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times \mathrm{B}).$$

On a donc montré qu'étant donné deux boréliens $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \mathbb{R}$, le produit $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ était un borélien de $\mathbb{R}^2$. Autrement dit,

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^2).$$

Remarque. On peut donner une autre preuve de ce résultat, un peu plus longue, mais qui utilise essentiellement les mêmes idées (et qui peut servir dans d'autres cas).

– Tout d'abord, on vérifie que

$$\left\{ \mathrm{A} \in \mathbb{R} \,\middle|\, \text{Pour tout ouvert } \mathrm{U} \subset \mathbb{R}, \mathrm{A} \times \mathrm{U} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) \right\}$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$. Puisqu'elle contient les ouverts de $\mathbb{R}$, elle contient la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

– Dans un deuxième temps, on vérifie que

$$\left\{ \mathrm{B} \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall \mathrm{A} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathrm{A} \times \mathrm{B} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) \right\}$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$. La première étape implique qu'elle contient les ouverts de $\mathbb{R}$, donc elle contient la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ et on a montré qu'un produit de boréliens est borélien.

2. Nous allons montrer que $\mathscr{D}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) = \mathscr{D}(\mathrm{X}) \otimes \mathscr{D}(\mathrm{Y})$ si et seulement si l'un des deux ensembles X ou Y a au plus un élément ou si les deux ensembles sont dénombrables (c'est-à-dire quasiment jamais).

   Si l'un des deux ensembles est vide, le produit l'est également. Il n'y a qu'une tribu sur l'ensemble vide, $\{\varnothing\}$, donc les deux nôtres coïncident nécessairement.

   Si l'un des deux ensembles est un singleton, disons Y, on a $\mathscr{D}(\mathrm{Y}) = \mathscr{P}(\mathrm{Y}) = \{\varnothing, \mathrm{Y}\}$. Via l'identification naturelle $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \simeq \mathrm{X}$, les produits $\mathrm{A} \times \varnothing$ sont vides et les produits $\mathrm{A} \times \mathrm{Y}$ s'identifient à Y. Les deux tribus $\mathscr{D}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$ et $\mathscr{D}(\mathrm{X}) \otimes \mathscr{D}(\mathrm{Y})$ sont donc égales, et s'identifient à $\mathscr{D}(\mathrm{X})$.

   Enfin, si les deux ensembles sont dénombrables, on a $\mathscr{D}(\mathrm{X}) = \mathscr{P}(\mathrm{X})$ et $\mathscr{D}(\mathrm{Y}) = \mathscr{P}(\mathrm{Y})$. La tribu $\mathscr{D}(\mathrm{X}) \otimes \mathscr{D}(\mathrm{Y})$ contient les singletons

$$\{(x, y)\} = (\{x\} \times \mathrm{Y}) \cap (\mathrm{X} \times \{y\})$$

   donc elle contient la tribu qu'elles engendrent, à savoir $\mathscr{P}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) = \mathscr{D}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$.

   Réciproquement, si les deux ensembles ont au moins deux éléments et que l'un des deux (disons Y) n'est pas dénombrable, on va construire un élément de $\mathscr{D}(\mathrm{X}) \otimes \mathscr{D}(\mathrm{Y})$ qui n'est pas dans $\mathscr{D}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$.

   Soit x un élément de X (remarquons que $\mathrm{X} \setminus \{x\}$ n'est pas vide) et soit $\mathrm{A} = (\mathrm{X} \setminus \{x\}) \times \mathrm{Y}$. Par construction, $\mathrm{A} \in \mathscr{D}(\mathrm{X}) \otimes \mathscr{D}(\mathrm{Y})$ mais il n'est ni dénombrable (si $x' \in \mathrm{X} \setminus \{x\}$, A contient l'ensemble $\{x'\} \times \mathrm{Y}$, en bijection avec Y et qui n'est donc pas dénombrable) ni codénombrable (son complémentaire contient $\{x\} \times \mathrm{Y}$). En général, on a donc

$$\mathscr{D}(\mathrm{X}) \otimes \mathscr{D}(\mathrm{Y}) \not\subset \mathscr{D}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}).$$

En revanche (même si la question ne le demande pas explicitement), on peut remarquer que l'inclusion $\mathscr{D}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \subset \mathscr{D}(\mathrm{X}) \otimes \mathscr{D}(\mathrm{Y})$ est valable en général. En effet, la tribu de gauche est à peu près par définition la tribu engendrée par les points $\{(x,y)\} = \{x\} \times \{y\}$, éléments de la tribu produit.

Exercice 8.— Tribus dénombrables

Suivant l'indication, commençons par démontrer le résultat intermédiaire suivant.

Soit $\mathscr{A}$ une tribu infinie. Il existe alors une famille infinie d'ensembles disjoints dans $\mathscr{A}$.

Pour démontrer cela, prenons une famille infinie $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, tous différents. On va découper ces ensembles le plus possible (en restant dans $\mathscr{A}$). Pour ce faire, définissons, pour $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ un ensemble

$$\mathrm{B}_\omega = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{B}_{\omega_i, i}, \quad \text{où } \mathrm{B}_{1,i} = \mathrm{A}_i \text{ et } \mathrm{B}_{0,i} = \mathrm{X} \setminus \mathrm{A}_i.$$

Par définition, ces ensembles sont disjoints (si $\omega \neq \omega'$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_i \neq \omega'_i$ et $\mathrm{B}_\omega \subset \mathrm{A}_i$ tandis que $\mathrm{B}_{\omega'} \subset \mathrm{X} \setminus \mathrm{A}_i$, ou réciproquement) et membres de la tribu $\mathscr{A}$. Le prix à payer est que l'on récupère ainsi le plus souvent un ensemble vide.
Par exemple, si la famille dénombrable de départ est celle des intervalles dyadiques, les (B_ω) sont soit des points, soit vides.
Il nous reste à démontrer que parmi cette multitude (non dénombrable !) de B_ω, une infinité ne sont pas réduits à $\varnothing$. Pour cela, remarquons que tout élément de la famille de départ s'écrit comme une réunion (a priori non dénombrable) de B_ω :

$$\mathrm{A}_i = \bigsqcup_{\substack{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ \omega_i = 1}} \mathrm{B}_\omega.$$

Ainsi, si seulement un nombre fini de B_ω n'étaient pas vides, l'on ne pourrait reconstituer en les assemblant qu'un nombre fini de (A_i) ce qui contredirait l'hypothèse de départ. Le lemme est ainsi démontré.
Il nous reste maintenant à voir pourquoi cela implique que la tribu ne peut pas être dénombrable. Remarquons qu'une famille infinie d'ensembles disjoints (et non vides) $(\mathrm{C}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ permet de définir une famille non dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$. Ainsi, on peut construire pour tout $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$ une partie $\mathrm{D}_\mathrm{I} = \bigsqcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{C}_i$. Puisque les C_i sont disjoints, les D_I sont tous différents, et ils sont indexés par l'ensemble des parties $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, qui est non dénombrable. Tout tribu infinie a donc un cardinal indénombrable.