TD 1 : tribus

Exercice 1.— Limites inférieure et supérieure d'ensembles

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur un ensemble X et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathscr{A}$. On définit les ensembles :

$$\liminf_n \mathrm{A}_n = \left\{ x \in \mathrm{X} \,\middle|\, x \text{ appartient à tous les } \mathrm{A}_n \text{ à partir d'un certain rang} \right\};$$
$$\limsup_n \mathrm{A}_n = \left\{ x \in \mathrm{X} \,\middle|\, x \text{ appartient à une infinité de } \mathrm{A}_n \right\}.$$

Montrer que $\liminf_n \mathrm{A}_n$ et $\limsup_n \mathrm{A}_n$ sont membres de la tribu $\mathscr{A}$. Donner des exemples intelligents où ces deux ensembles coïncident ainsi que des exemples où ils diffèrent.

Exercice 2.— Quelques boréliens de $\mathbb{R}$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants sont boréliens :

1. $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\}$;
2. $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet } 0 \text{ comme valeur d'adhérence} \right\}$;
3. $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \right\}$.

Exercice 3.— Boréliens de $\mathbb{Q}$

Montrer que la tribu des boréliens $\mathscr{B}(\mathbb{Q})$ coïncide avec la tribu pleine $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$. Généraliser au cas d'un espace métrique dénombrable.

Exercice 4.— Tribu engendrée par une partition

Soit X un ensemble fini et $\mathscr{P} = (\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une partition de X. On dit alors que la tribu $\mathscr{A} = \sigma\left(\left\{ \mathrm{A}_i \,\middle|\, i \in \mathrm{I} \right\}\right)$ est *engendrée* par la partition $\mathscr{P}$.

1. Décrire explicitement les éléments de la tribu $\mathscr{A}$.
2. Démontrer que toute tribu sur X est engendrée par une partition de X.
3. En déduire le nombre de tribus sur un ensemble fini.
4. Reprendre les questions 1 et 2 lorsque X est dénombrable.

Exercice 5.— Intervalles dyadiques

On appelle *intervalle dyadique* de $[0,1[$ un intervalle de la forme $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$, où $n \in \mathbb{N}$ et k est un entier compris entre 0 et $2^n - 1$.

1. Montrer que deux intervalles dyadiques sont emboîtés ou disjoints.
2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}$ des unions finies d'intervalles dyadiques est stable par passage au complémentaire, union finie et intersection finie. (On dit que $\mathscr{A}$ est une *algèbre de parties de* $[0, 1[$.)
3. Montrer que la tribu engendrée par les intervalles dyadiques est la tribu borélienne $\mathscr{B}([0, 1[)$.

Exercice 6.— Tribu cylindrique

Soit $\mathrm{X} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

1. Montrer que la fonction d définie par $d((x_n)_n, (y_n)_n) = 2^{-\min\{i\in\mathbb{N}\,|\,x_i\neq y_i\}}$ définit une distance sur X. On l'appelle *distance dyadique*.
2. Montrer que l'espace métrique $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est complet, séparable et compact.
3. On appelle *cylindre* un ensemble de la forme

$$\mathrm{C}(a_0, a_1, \ldots, a_r) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall i \in [\![1, r]\!], x_i = a_i \right\},$$

   où $a_0, \ldots, a_r \in \{0, 1\}$. Montrer que les unions finies de cylindres forment une algèbre de parties que l'on notera $\mathscr{C}$.
4. Montrer que la tribu engendrée par $\mathscr{C}$ coïncide avec la tribu des boréliens de X.

Exercice 7.— Tribu produit

Soit $(\mathrm{X}_1, \mathscr{A}_1)$ et $(\mathrm{X}_2, \mathscr{A}_2)$ deux espaces mesurables (*i.e.* ensembles munis d'une tribu). On définit la *tribu produit* $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ comme la tribu engendrée

$$\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 = \sigma\left(\left\{ \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \,\middle|\, \mathrm{A}_i \in \mathscr{A}_i \right\} \right).$$

On note $\mathscr{D}(\mathrm{X})$ la tribu des parties dénombrables ou codénombrables d'un ensemble X et $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ la tribu borélienne d'un espace métrique X.

1. Montrer que $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
2. Soit X et Y deux ensembles. Dans quels cas a-t-on $\mathscr{D}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) = \mathscr{D}(\mathrm{X}) \otimes \mathscr{D}(\mathrm{Y})$?

Exercice 8.— Tribus dénombrables

Démontrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable. On pourra commencer par montrer que l'on peut toujours trouver dans une tribu infinie une collection infinie d'ensembles disjoints.