TD 2 : correction

Exercice 1.— Structure de l'ensemble des mesures

(a) Nous allons montrer les deux inégalités.
Soit $\mathrm{F} \subset \mathrm{I} \times \mathrm{J}$ un ensemble fini. Si on note A (resp. B) la projection de F sur le premier (resp. second) facteur, A et B sont deux ensembles finis tels que $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \times \mathrm{B}$. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in \mathrm{F}} a_{i,j} &\leq \sum_{(i,j)\in \mathrm{A}\times\mathrm{B}} a_{i,j}\\ &= \sum_{i\in\mathrm{A}}\sum_{j\in\mathrm{B}} a_{i,j}\\ &\leq \sum_{i\in\mathrm{A}}\sum_{j\in\mathrm{J}} a_{i,j}\\ &\leq \sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}} a_{i,j},\end{aligned}$$

où les deux dernières inégalités proviennent de la définition de la somme d'une famille (la somme est toujours supérieure ou égale à ses sous-sommes finies, puisqu'elle en est par définition la borne supérieure).
Cette inégalité étant vraie quel que soit l'ensemble fini $\mathrm{F} \subset \mathrm{I} \times \mathrm{J}$, elle passe à la borne supérieure et l'on a

$$\sum_{(i,j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{i,j} \leq \sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}} a_{i,j}.$$

Pour l'inégalité réciproque, soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{I}$ une partie finie et $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{A}}$ une famille de parties finies de J. L'ensemble $\mathrm{F} = \mathrm{A} \times \left(\bigcup_{i\in\mathrm{A}} \mathrm{B}_i\right)$ est alors une partie finie de $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$.
On a donc

$$\sum_{i\in\mathrm{A}}\sum_{j\in\mathrm{B}_i} a_{i,j} \leq \sum_{(i,j)\in\mathrm{F}} a_{i,j} \leq \sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{i,j}.$$

L'inégalité précédente étant vraie pour toutes les familles finies $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{A}} \in \mathscr{P}_f(\mathrm{J})^{\mathrm{A}}$, on peut passer à la borne supérieure [1] et obtenir l'inégalité

$$\sum_{i\in\mathrm{A}}\sum_{j\in\mathrm{J}} a_{i,j} \leq \sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{i,j}.$$

En passant à la borne supérieure sur A, on obtient l'inégalité voulue

$$\sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}} a_{i,j} \leq \sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{i,j}.$$

1. On utilise ici l'égalité $\sup\limits_{(x_1,\dots,x_r)\in\mathrm{X}_1\times\cdots\times\mathrm{X}_r} (x_1+\cdots+x_r) = \sup\limits_{x_1\in\mathrm{X}_1} x_1 + \cdots + \sup\limits_{x_r\in\mathrm{X}_r} x_r$, pour des parties non vides $\mathrm{X}_i \subset [0,\infty]$.

(b) La preuve précédente se traduit sans aucune difficulté en une preuve de l'égalité symétrique
$$\sum_{(i,j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{i,j} = \sum_{j\in\mathrm{J}}\sum_{i\in\mathrm{I}} a_{i,j}.$$
On obtient en particulier la propriété de Fubini.

(c) Dans la définition de la notion de mesure, la somme intervenant dans la propriété dite de σ-additivité
$$\mu\left(\bigsqcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mu\left(\mathrm{A}_i\right)$$
est évidemment à prendre au sens donné dans l'énoncé.

Soit maintenant $(\mu_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille arbitraire de mesures définies sur $(\mathrm{X},\mathscr{A})$. La formule $\mu(\mathrm{A}) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mu_i(\mathrm{A})$ définit bien une mesure :

– $\mu(\varnothing) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mu_i(\varnothing) = \sum_{i\in\mathrm{I}} 0 = 0.$

– Soit $(\mathrm{A}_j)_{j\in\mathrm{J}}$ une famille dénombrable d'ensembles mesurables disjoints.
$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigsqcup_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{A}_j\right) &= \sum_{i\in\mathrm{I}} \mu_i\left(\bigsqcup_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{A}_j\right) && \text{(par définition de } \mu\text{)}\\
&= \sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}} \mu_i(\mathrm{A}_j) && \text{(par } \sigma\text{-additivité de } \mu_i\text{)}\\
&= \sum_{j\in\mathrm{J}}\sum_{i\in\mathrm{I}} \mu_i(\mathrm{A}_j) && \text{(par la propriété de Fubini)}\\
&= \sum_{j\in\mathrm{J}} \mu(\mathrm{A}_j).
\end{aligned}$$

(d) La vérification est essentiellement immédiate si $r \in]0,+\infty[$. Si $r=0$, la convention $0\cdot\infty = 0$ entraîne que $r\mu$ associe simplement 0 à tout ensemble de la tribu. C'est évidemment une mesure, la mesure nulle. Il reste donc essentiellement à vérifier la propriété pour $r=\infty$.

Dans ce cas, d'après la formule définissant $r\mu$ (et la convention $\infty\cdot 0 = 0$), nous sommes en train de considérer la fonction
$$\nu : \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \to & \{0,\infty\} \\ \mathrm{A} & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } \mu[\mathrm{A}] = 0 \\ \infty & \text{si } \mu[\mathrm{A}] \in]0,\infty]\,. \end{cases} \end{array}$$
La σ-additivité de ν se résume alors à : si $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille dénombrable d'ensembles mesurables disjoints, l'union $\bigsqcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ est μ-négligeable (c'est-à-dire de μ-mesure nulle) si et seulement si chacun des A_i l'est, ce qui est une conséquence directe de la σ-additivité de μ.

(e) L'affirmation est fausse en général. Par exemple, sur $\mathrm{X} = \{0,1\}$ muni de la tribu pleine $\mathscr{P}(\mathrm{X})$, on considère les deux mesures de Dirac δ_0 et δ_1, et on vérifie que $\mu = \max(\delta_0,\delta_1)$ ne définit pas une mesure, en effet :
$$\mu(\{0,1\}) \neq \mu(\{0\}) + \mu(\{1\})$$

Exercice 2.— Il existe toujours des mesures

On peut par exemple prendre la mesure de Dirac δ_{x_0}, pour un $x_0 \in \mathrm{X}$ fixé.

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{X}), \delta_{x_0}(\mathrm{A}) = [x_0 \in \mathrm{A}].$$

Une autre solution est la mesure de comptage μ :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{X}), \mu(\mathrm{A}) = |\mathrm{A}| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

En utilisant les notations du premier exercice, on a d'ailleurs

$$\mu = \sum_{x \in \mathrm{X}} \delta_x.$$

Exercice 3.— Mesures sur $\mathbb{Q}$

D'après le premier exercice, on sait déjà construire un grand nombre de mesures sur $\mathbb{Q}$: si $a = (a_r)_{r\in\mathbb{Q}}$ est une famille d'éléments de $[0, \infty]$, on a la mesure $\mu_a = \sum_{r\in\mathbb{Q}} a_r \cdot \delta_r$ telle que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathbb{Q}), \mu_a(\mathrm{A}) = \sum_{r\in\mathrm{A}} a_r.$$

On va montrer que toute mesure sur $(\mathbb{Q}, \mathscr{P}(\mathbb{Q}))$ est de ce type : soit donc μ une mesure quelconque et, pour tout $r \in \mathbb{Q}$,

$$a_r = \mu(\{r\}) \in [0, \infty].$$

Il s'agit de démontrer que $\mu = \mu_a$. Pour cela, il suffit de constater que tout élément $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathbb{Q})$ est union disjointe dénombrable de ses singletons. On a donc, pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathbb{Q})$,

$$\mu(\mathrm{A}) = \mu\left(\bigsqcup_{r\in\mathrm{A}} \{r\}\right) = \sum_{r\in\mathrm{A}} \mu(\{r\}) = \sum_{r\in\mathrm{A}} a_r = \mu_a(\mathrm{A}).$$

Exercice 4.— Mesures sur une tribu finie

On peut montrer, comme dans l'exercice 4 du TD 1, qu'une tribu finie est toujours engendrée par une partition. Il existe donc $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathscr{A}$ deux à deux disjoints, non vides, tels que :

$$\mathscr{A} = \left\{ \bigcup_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{A}_j \;\middle|\; \mathrm{J} \subset [\![1, n]\!] \right\}.$$

Si μ est une mesure sur $(\mathrm{X}, \mathscr{A})$, posons pour $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = \mu(\mathrm{A}_i)$. La σ-additivité de μ donne alors, pour tout $\mathrm{J} \subset [\![1, n]\!]$,

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{A}_j\right) = \sum_{j\in\mathrm{J}} a_j. \tag{1}$$

Réciproquement, si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ est un n-uplet d'éléments de $[0, \infty]$, on vérifie que la formule (1) définit bien une mesure μ_a sur $\mathscr{A}$.
Conclusion : L'ensemble des mesures sur $\mathscr{A}$ est

$$\left\{\mu_a \,\middle|\, a \in [0,\infty]^n\right\}.$$

Remarque : Une fois qu'on a remarqué que $\mathscr{A}$ est engendrée par une partition, l'exercice devient ensuite similaire à l'exercice 3 : tout comme une mesure sur $\mathbb{Q}$ est caractérisée par les valeurs qu'elle prend sur les singletons, une mesure définie sur une tribu engendrée par une partition dénombrable est caractérisée par les valeurs prises sur les éléments de la partition.

Exercice 5.— Lemme de Borel–Cantelli, première partie

On a, pour tout $n_0 \geq 0$,

$$\mu(\limsup_n \mathrm{A}_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} \mathrm{A}_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k\geq n_0} \mathrm{A}_k\right) \leq \sum_{k\geq n_0} \mu(\mathrm{A}_k)$$

Or, $\sum_{k\geq n_0} \mu(\mathrm{A}_k)$ est le reste d'une série convergente, et il tend donc vers 0 quand n_0 tend vers l'infini. On a donc bien $\mu(\limsup_n \mathrm{A}_n) = 0$.

Exercice 6.— Sommes de mesures de Dirac

(a) La mesure $\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_n}$ existe d'après les propriétés générales dégagées au premier exercice.

(b) En général, pour $\mathrm{A} > 0$,

$$\mu([-\mathrm{A}, \mathrm{A}]) = \sum_{n\in\mathbb{N}} [-\mathrm{A} \leq x_n \leq \mathrm{A}] = \left|\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, |x_n| \leq \mathrm{A}\right\}\right|.$$

Ainsi, si μ est finie sur les intervalles bornées, quel que soit $\mathrm{A} > 0$, $|x_n| > \mathrm{A}$ sauf pour un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne

$$|x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Réciproquement, si cette convergence a lieu, ce qui précède montre que $\mu([-\mathrm{A}, \mathrm{A}])$ est fini pour tout $\mathrm{A} > 0$. Comme tout intervalle borné est inclus dans un tel $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$, on en déduit que μ est bornée sur les intervalles (en fait, les boréliens) bornés.

(c) On montre dans un premier temps que :

$$\mu \text{ est } \sigma\text{-finie} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mu(\{x_n\}) < \infty. \tag{2}$$

Si μ est σ-finie, on peut écrire $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_k$ avec tous les A_k de mesure finie. Chaque x_n appartient donc à un sous ensemble de mesure finie, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mu(\{x_n\}) < \infty$.

Réciproquement, supposons qu'aucun singleton n'ait de mesure infinie. Posons

$$\mathrm{N} = \mathbb{R} \setminus \left\{ x_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_{x_n}(\mathrm{N}) = 0$, et donc $\mu(\mathrm{N}) = 0$. On conclut que μ est σ-finie en remarquant que :

$$\mathbb{R} = \mathrm{N} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$$

Par ailleurs, on remarque que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mu(\{y\}) = \left| \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, x_n = y \right\} \right|$. À partir de l'équivalence (2), on obtient finalement la caractérisation suivante :
μ est σ-finie si et seulement si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend pas la même valeur une infinité de fois.