TD 2 : mesures

Exercice 1.— Structure de l'ensemble des mesures

(a) Soit I un ensemble quelconque et $(a_i)_{i\in \mathrm{I}} \in [0,\infty]^{\mathrm{I}}$. On définit la *somme* de la famille

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sup_{\substack{\mathrm{J}\subset\mathrm{I}\\ \mathrm{J}\text{ fini}}} \sum_{i\in\mathrm{J}} a_j \in [0,\infty]$$

avec la convention qu'une somme finie d'éléments de $[0,\infty]$ vaut ∞ dès que l'un d'eux vaut ∞. Montrer que si $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ est une famille d'éléments de $[0,\infty]$,

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_{i,j} = \sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}} a_{i,j}.$$

(b) En déduire la *propriété de Fubini* :

$$\sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}} a_{i,j} = \sum_{j\in\mathrm{J}}\sum_{i\in\mathrm{I}} a_{i,j}.$$

(c) Soit $(\mu_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de mesures sur un espace mesurable $(\mathrm{X},\mathscr{A})$. Montrer que

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathscr{A} & \to & [0,\infty] \\ & \mathrm{A} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i\in\mathrm{I}} \mu_i(\mathrm{A}) \end{array}$$

est une mesure sur $[0,\infty]$, que l'on peut noter $\displaystyle\sum_{i\in\mathrm{I}} \mu_i$.

(d) Soit μ une mesure sur un ensemble mesurable $(\mathrm{X},\mathscr{A})$ et $r\in[0,\infty]$. Montrer que

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathscr{A} & \to & [0,\infty] \\ & \mathrm{A} & \mapsto & r\cdot\mu(\mathrm{A}), \end{array}$$

avec la convention $0\cdot\infty = \infty\cdot 0 = 0$, définit une mesure sur $(\mathrm{X},\mathscr{A})$, que l'on peut noter $r\mu$.

(e) En général, le maximum de deux mesures définit-il une mesure ?

Exercice 2.— Il existe toujours des mesures

Soit X un ensemble non vide. Montrer qu'il existe une mesure non nulle sur $(\mathrm{X},\mathscr{P}(\mathrm{X}))$.

Exercice 3.— Mesures sur $\mathbb{Q}$

Décrire toutes les mesures sur $(\mathbb{Q},\mathscr{B}(\mathbb{Q})) = (\mathbb{Q},\mathscr{P}(\mathbb{Q}))$.

Exercice 4.— Mesures sur une tribu finie

Soit X un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu finie sur X. Décrire toutes les mesures sur $(\mathrm{X}, \mathscr{A})$.

Exercice 5.— Lemme de Borel–Cantelli, première partie

Soit $(\mathrm{X}, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{A}_n) < \infty.$$

Montrer que l'ensemble $\limsup_n \mathrm{A}_n$ est de mesure nulle.

Exercice 6.— Sommes de mesures de Dirac

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

(a) Montrer que $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{x_n}$ définit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

(b) Montrer que μ est finie sur tous les intervalles bornés si et seulement si $|x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

(c) Pour quelles suites la mesure μ est-elle σ-finie ?