TD 3 : correction

Exercice 1.— Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$: vrai ou faux ?

1. Le cours garantit que cette propriété est vraie si la mesure d'un des A_n est finie. En revanche, la famille de boréliens $\mathrm{A}_n = [n, +\infty[$ montre que la réciproque est fausse :

$$\mathrm{A}_n \supset \bigsqcup_{m \geq n}]m, m+1[\quad \text{donc} \quad \forall n, \lambda(\mathrm{A}_n) = \infty.$$

2. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est un borélien (et même un G_δ) :

$$\mathbb{R} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{r\}).$$

   Son complémentaire $\mathbb{Q}$ étant dense, il est d'intérieur vide. Pourtant, l'écriture

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \sqcup \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$$

   montre que $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \infty$.
3. Par définition, si A est d'intérieur non vide, il contient un intervalle ouvert non trivial : il existe $r < s$ tels que $]r, s[\subset \mathrm{A}$. Si A est borélien, on a donc

$$\lambda(\mathrm{A}) \geq \lambda\left(]r, s[\right) = s - r > 0.$$

4. Si K est compact, il est borné et on peut donc trouver $\mathrm{N} > 0$ tel que $\mathrm{K} \subset [-\mathrm{N}, \mathrm{N}]$. En particulier, (il est borélien et)

$$\lambda(\mathrm{K}) \leq 2\mathrm{N}.$$

Exercice 2.— Exemple de Vitali

Si $x \in \mathbb{R}$, sa classe d'équivalence pour la relation $\sim$ n'est autre que $x + \mathbb{Q}$. Puisque cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}$, on peut en trouver un élément dans $[0, 1]$. Soit donc $\mathrm{V} \subset [0, 1]$ un ensemble contenant un unique représentant de chaque classe d'équivalence (on parle parfois de *transversale* pour la relation d'équivalence).
Montrons maintenant les inclusions suivantes :

$$[0, 1] \subset \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (r + \mathrm{V}) \subset [-1, 2].$$

La deuxième inclusion vient simplement de l'inclusion $\mathrm{V} \subset [0, 1]$ et de l'inégalité triangulaire. Pour démontrer la première, prenons $x \in [0, 1]$. Soit également y l'unique élément de V tel que $x - y \in \mathbb{Q}$.

Puisque x et y appartiennent tous deux à $[0,1]$, la quantité $x-y$ appartient à $[-1,1]$. On peut donc écrire x sous la forme

$$x = \underbrace{x-y}_{\in \mathbb{Q}\cap[-1,1]} + \underbrace{y}_{\in \mathrm{V}},$$

ce qui démontre la première inclusion.
Montrons également ce que sous-entend l'utilisation du caractère $\bigsqcup$, c'est-à-dire que les $r+\mathrm{V}$ intervenant dans l'union sont bien disjoints. S'il existait r et r' dans $\mathbb{Q}\cap[-1,1]$ tels que $(r+\mathrm{V})\cap(r'+\mathrm{V}) \neq \varnothing$, on pourrait trouver v et v' dans V tels que $r+v = r'+v'$. Mais cela implique $v'-v = r-r' \in \mathbb{Q}$. Par construction de V, ce n'est possible que si $v = v'$, ce qui implique $r = r'$. Les ensembles $r+\mathrm{V}$ sont donc bien disjoints.
Montrons maintenant que cette propriété entraîne que V ne peut pas être borélien. Le point-clef est que si V était borélien, il aurait une mesure de Lebesgue. Mais :

– Si $\lambda(\mathrm{V})$ était > 0, on aurait, d'après l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation, $\forall r \in \mathbb{Q}, \lambda(r+\mathrm{V}) = \lambda(\mathrm{V})$. L'inclusion

$$\bigsqcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (r+\mathrm{V}) \subset [-1,2]$$

implique alors

$$3 = \lambda([-1,2]) \geq \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \lambda(\mathrm{V}) = \infty,$$

ce qui constitue une contradiction.

– En revanche, si $\lambda(\mathrm{V}) = 0$, l'inclusion

$$[0,1] \subset \bigsqcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (r+\mathrm{V})$$

implique

$$1 = \lambda([0,1]) \leq \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \lambda(\mathrm{V}) = 0,$$

une contradiction.

La contradiction est donc inévitable : l'hypothèse que V est un borélien est absurde.

Exercice 3.— Ensembles de Cantor

(a) Les « étapes de construction » $\mathrm{K}_3^{(n)}$ sont des compacts emboîtés. En particulier, ils sont de mesure finie. On peut donc affirmer que

$$\lambda(\mathrm{K}_3) = \lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_3^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\mathrm{K}_3^{(n)}\right).$$

Mais l'ensemble $\mathrm{K}_3^{(n)}$ est composé de 2^n intervalles de taille 3^{-n} chacun. On a donc

$$\lambda(\mathrm{K}_3) = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot 3^{-n} = 0.$$

(b) Le début de la preuve reste parfaitement valable :

$$\lambda\left(\mathrm{K}\right)=\lim_{n\to\infty}\lambda\left(\mathrm{K}^{(n)}\right)$$

mais les mesures des étapes successives ont changé. Par construction, on a

$$\lambda\left(\mathrm{K}^{(n)}\right)=(1-\lambda_0)(1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_{n-1}).$$

On obtient donc la mesure de K

$$\lambda(\mathrm{K})=\prod_{n=0}^{\infty}(1-\lambda_n).$$

Il reste à montrer qu'un choix judicieux des (λ_n) permet d'obtenir une mesure $\alpha\in[0,1[$ quelconque. Si $\alpha=0$, une somme constante fait l'affaire, comme on l'a vu à la question précédente.

Si $\alpha\in]0,1[$, il suffit de trouver une série $\sum\ell_n$ à termes négatifs dont la somme soit $\ln\alpha\in\mathbb{R}_-$ ($\ell_n=2^{-(n+1)}\ln\alpha$ convient, par exemple) et de prendre $\lambda_n=1-e^{\ell_n}$.

(c) Commençons par trouver un moyen univoque de numéroter les composantes connexes des étapes de construction $\mathrm{K}^{(n)}$. Pour cela, remarquons que chaque composante connexe de $\mathrm{K}^{(n)}$ est découpée en deux composantes connexes de $\mathrm{K}^{(n+1)}$ après qu'on lui ait enlevé un intervalle central. Convenons alors de noter $\mathrm{K}(0)$ et $\mathrm{K}(1)$ les composantes connexes gauche et droite de l'étape de construction $\mathrm{K}^{(1)}$ puis, par récurrence, si $a_1,\ldots,a_n\in\{0,1\}$, notons $\mathrm{K}(a_1,\ldots,a_n,0)$ et $\mathrm{K}(a_1,\ldots,a_n,1)$ les composantes connexes gauche et droite, respectivement, issues du redécoupage de $\mathrm{K}(a_1,\ldots,a_n)$. Ainsi, les 2^n composantes connexes de $\mathrm{K}^{(n)}$ sont les $\mathrm{K}(a_1,\ldots,a_n)$ pour $(a_1,\ldots,a_n)$ décrivant $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (et l'ordre naturel sur les composantes connexes correspond à l'ordre lexicographique). Pour plus d'élégance mais sans que ça ne soit guère utile, on pourrait d'ailleurs décider de noter $\mathrm{K}(\varepsilon)$ l'unique composante connexe de $\mathrm{K}^{(0)}$, c'est-à-dire l'intervalle $[0,1]$ tout entier (ε désignant la suite vide).

Nous pouvons maintenant définir notre homéomorphisme : si $\omega=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, notons $\omega[n]$ la suite finie constituée des $n+1$ premiers bits $(\omega_0,\ldots,\omega_n)$. Les intervalles $\mathrm{I}_{\omega,n}=\mathrm{K}(\omega[n])$ correspondant sont des segments emboîtés. Par ailleurs, leur diamètre tend vers 0, puisque chaque intervalle $\mathrm{I}_{\omega,n}$ est au moins deux fois plus petit que $\mathrm{I}_{\omega,n-1}$.

Ainsi, d'après le théorème des compacts emboîtés, chaque intersection infinie

$$\mathrm{I}_\omega=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{I}_{\omega,n}$$

se réduit à un singleton. On note $\varphi(\omega)$ l'unique élément de ce singleton.

On a donc défini une fonction

$$\varphi:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to\mathrm{K}$$

dont nous allons montrer successivement la bijectivité et la continuité. Une bijection continue partant d'un espace compact étant automatiquement un homéomorphisme, cela conclura la preuve.

L'injectivité de φ est claire par construction : les intervalles $\mathrm{I}_{\omega,n}$ ayant un diamètre tendant vers 0, deux points différents $x\neq y$ de K ne peuvent pas appartenir à la même composante connexe $\mathrm{I}_{\omega,n}$ dès que n est suffisamment grand. Et puisque chaque point de $\mathrm{K} = \bigcap \mathrm{K}^{(n)}$ doit bien appartenir à une composante connexe de chaque $\mathrm{K}^{(n)}$ (lesquelles sont alors automatiquement emboîtées les unes dans les autres lorsque n varie), φ est surjective.

Montrons maintenant que φ est continue. Soit $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $x = \varphi(\omega)$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x. Les intervalles $\mathrm{I}_{\omega,n}$ ayant un diamètre tendant vers 0, $\mathrm{I}_{\omega,n}$ est inclus dans ω dès que n est au moins égal à un $n_0 \geq 0$ fixé.

Or, $\mathrm{I}_{\omega,n} = \varphi\left[\mathrm{C}(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)\right]$, où, en reprenant les notations du TD 1,

$$\mathrm{C}(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n) = \left\{\varpi \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall i \in [\![0,n]\!], \varpi_i = \omega_i\right\}.$$

Mais ce cylindre est un voisinage de ω – c'est même la boule ouverte $\mathrm{B}(\omega, 2^{-n-1})$ et on vient de voir qu'il est inclus dans $\varphi^{-1}[\mathrm{U}]$. L'application φ est donc bien continue et donc un homéomorphisme.

En particulier, tous les espaces que nous avons construits sont homéomorphes entre eux.

Remarque importante. Puisqu'ils sont tous homéomorphes, on parle parfois de *l'ensemble de Cantor* (voire du *cantor*) pour désigner l'un de ces ensembles. Cet exercice montre qu'il existe des cantor de mesure nulle et des cantors de mesure non nulle, aussi appelés *cantors gras.*

En fait, on peut dire mieux : étant donné deux tels espaces K_0 et K_1, il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(\mathrm{K}_0) = \mathrm{K}_1$. (Exercice : pourquoi cette homéomorphie « ambiante » est-elle plus forte que le simple fait d'être homéomorphe ?) Cette propriété est en fait assez perturbante, puisqu'elle démontre qu'un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ peut envoyer un ensemble de mesure nulle sur un ensemble de mesure non nulle (et réciproquement)...

Exercice 4.— Fonctions de répartition

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ finie sur les compacts.

(a) L'intervalle $[0,x[$ est un ouvert de $\mathbb{R}_+$, donc il est mesurable et il est de mesure finie car il est inclus dans le compact $[0,x]$. La fonction F est donc bien définie.

Elle est croissante par croissance de la mesure.

Enfin, montrons la continuité à gauche. Tout d'abord, notons que si $y < x$, alors

$$|\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(y)| = \mu([0,x[) - \mu([0,y[\ ) = \mu([y,x[)$$

car $[0,y[$ est de mesure finie.

Soit une suite $y_n < x$ de réels qui tend vers x, que l'on peut supposer croissante. On a alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left([y_n, x[\ \right) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [y_n, x[\right) = \mu(\varnothing) = 0.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathrm{F}(y_n) - \mathrm{F}(x)| = 0.$

(b) La fonction F est continue si et seulement si la mesure μ *n'a pas d'atome*, ce qui signifie que la mesure des singletons est nulle. En effet, si (y_n) est une suite décroissante convergeant vers x, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{F}(y_n) = \lim_{n\to\infty} \mu([0, y_n[) = \mu\left(\bigcap_{n\to\infty} [0, y_n[\right) = \mu([0, x]).$$

(On a utilisé que les $[0, y_n[$ étaient de mesure finie.) La fonction F est donc continue en x si et seulement si $\mu([0, x]) = \mu([0, x[)$, ce qui, puisque les ensembles mis en jeu sont de mesure finie, est équivalent à la condition $\mu(\{x\}) = 0$.

(c) La fonction F est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même si et seulement si elle est strictement croissante, surjective et continue. Montrons que c'est le cas si et seulement si la mesure μ n'a pas d'atomes, que $\mu(\mathbb{R}_+) = +\infty$ et que, pour tout ouvert non vide U, $\mu(\mathrm{U}) > 0$ (on dit que μ *charge les ouverts*).
Rappelons que, si $y < x$, alors $\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(x) = \mu([x, y[)$.
Si F est strictement croissante, cette égalité nous montre que μ charge tous les ouverts non vides de $\mathbb{R}_+$ (par exemple, pour tout $a > 0$, $\mu([0, a[) = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(0) > 0$).
De plus, $\mu(\mathbb{R}_+) = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0) = +\infty$ car F est strictement croissante et surjective sur $\mathbb{R}_+$. Et enfin, si F est continue, alors μ n'a pas d'atomes d'après ce qui précède.
Réciproquement, si μ est strictement positive sur tout ouvert non vide, la même égalité implique la stricte croissance de F. De plus $\mu(\mathbb{R}_+) = +\infty$ implique

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = +\infty.$$

Donc F est surjective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

(d) Cette construction calque la construction de la mesure de Lebesgue (qui correspond au cas $\mathrm{F} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$).
L'unicité de la mesure μ découle du lemme des classes monotones : la classe

$$\mathscr{C} = \left\{[0, x[\;\middle|\; x \in \mathbb{R}_+\right\}$$

est stable par intersection finie et engendre la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$.
Pour montrer l'existence, on pose, pour tout $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}_+$,

$$\mu^*(\mathrm{A}) = \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\mathrm{F}(b_i) - \mathrm{F}(a_i)) \;\middle|\; \mathrm{A} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [a_i, b_i[\right\}.$$

(Notons qu'on recouvre A par des intervalles semi-ouverts, et non plus des intervalles ouverts comme dans le cas de la mesure de Lebesgue). Vérifions que μ^* est une mesure extérieure :

- Il est immédiat que $\mu^*(\varnothing) = 0$ et que μ^* est croissante.
- On montre que μ^* est sous-additive : soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}_+$. On peut supposer que, pour tout n, $\mu^*(\mathrm{A}_n)$ est finie (sinon, le résultat est évident).

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une suite d'intervalles $\left(\left[a_i^{(n)}, b_i^{(n)}\right[\right)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathrm{A}_n \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left[a_i^{(n)}, b_i^{(n)}\right[$ et

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (\mathrm{F}(b_i^{(n)}) - \mathrm{F}(a_i^{(n)})) \leq \mu^*(\mathrm{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

La famille $\left(\left[a_i^{(n)}, b_i^{(n)}\right[\right)_{i,n\in\mathbb{N}}$ forme alors un recouvrement dénombrable de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ et on a donc

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} (\mathrm{F}(b_i^{(n)}) - \mathrm{F}(a_i^{(n)})) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(\mathrm{A}_n) + 2\varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit le résultat.
On veut ensuite montrer que $\mathscr{M}(\mu^*)$ contient $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$. Il suffit de vérifier qu'elle contient les intervalles $[0, x[$. Posons $\mathrm{B} = [0, x[$. On doit montrer :

$$\forall \mathrm{A} \subset \mathbb{R}_+, \ \mu^*(\mathrm{A}) \geq \mu^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mu^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^c)$$

Soit $([a_i, b_i[)_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de A et $\varepsilon > 0$. Les intervalles

$$[\min(a_i, x), \min(b_i, x)[$$

recouvrent $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, et les intervalles

$$[\max(a_i, x), \max(b_i, x)[$$

recouvrent $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^c$. D'où :

$$\begin{aligned}
\mu^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + &\mu^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}^c) \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{F}(\min(b_i, x)) - \mathrm{F}(\min(a_i, x)) + \mathrm{F}(\max(b_i, x)) - \mathrm{F}(\max(a_i, x)) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} (\mathrm{F}(b_i) - \mathrm{F}(a_i)).
\end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie quelque soit le recouvrement de A choisi, et on obtient donc l'inégalité voulue.
Ainsi, la restriction, notée μ, de μ^* à $\mathscr{M}(\mu^*)$ est une mesure sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$.
Pour conclure, il reste à montrer que $\mu([0, x[) = \mathrm{F}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par construction de μ^*, on a l'inégalité immédiate :

$$\mu([0, x[) \leq \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(x).$$

Dans l'autre sens, soit $([a_i, b_i[)_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de $[0, x[$. Soit $\varepsilon \in]0, x[$. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, par continuité à gauche et croissance de F, on peut trouver $a_i' < a_i$ tel que $\mathrm{F}(a_i') \geq \mathrm{F}(a_i) - \varepsilon 2^{-i}$. Ensuite, on remarque qu'on peut recouvrir l'intervalle compact $[0, x-\varepsilon]$ par une sous-famille finie $(]a'_i, b_i[)_{i\in \mathrm{F}_\varepsilon}$ de la famille des intervalles ouverts $(]a'_i, b_i[)_{i\in\mathbb{N}}$. On a alors (par croissance de F) :

$$\mathrm{F}(x-\varepsilon)-\mathrm{F}(0) \leq \sum_{i\in \mathrm{F}_\varepsilon}(\mathrm{F}(b_i)-\mathrm{F}(a'_i)) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}(\mathrm{F}(b_i)-\mathrm{F}(a'_i)) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}(\mathrm{F}(b_i)-\mathrm{F}(a_i))+2\varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient (grâce à la continuité à gauche en 0) :

$$\mathrm{F}(x) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}(\mathrm{F}(b_i)-\mathrm{F}(a_i)),$$

ce qui, par définition de μ^*, donne bien la minoration :

$$\mu^*([0,x[) \geq \mathrm{F}(x).$$

Exercice 5.— Propriétés d'invariance de la mesure de Lebesgue

(a) Soit $\mathrm{T} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ la translation de vecteur $v = (v_1, \ldots, v_d)$. On définit la mesure image $\lambda' = \mathrm{T}_*(\lambda)$. Par définition, c'est la mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ qui associe à chaque pavé $\prod_{i=1}^d]a_i, b_i[$ la mesure

$$\begin{aligned}\lambda'\left(\prod_{i=1}^d]a_i,b_i[\right) &= \lambda\left(\mathrm{T}^{-1}\left[\prod_{i=1}^d]a_i,b_i[\right]\right)\\ &= \lambda\left(\prod_{i=1}^d]a_i-v_i, b_i-v_i[\right)\\ &= (b_1-a_1)\cdots(b_d-a_d).\end{aligned}$$

En particulier, la mesure image $\lambda' = \mathrm{T}_*(\lambda)$ prend les mêmes valeurs que λ sur un ensemble de parties $\mathscr{P} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ (les pavés ouverts) stable par intersection finie, engendrant la tribu borélienne et possédant une famille dénombrable croissante recouvrant $\mathbb{R}^d$ tout entier. D'après un théorème du cours, on a donc

$$\lambda = \lambda' = \mathrm{T}_*\lambda,$$

ce qui démontre que la mesure de Lebesgue est stable par translation.

(b) Déjà, si $r = 0$, l'égalité

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{v\in\mathbb{Z}^d} v + [0,1[^d$$

montre que $\mu(\mathbb{R}^d) = 0$. On peut donc supposer $r \neq 0$ et poser $\mu' = \mu/r$. Il s'agit de montrer que $\mu' = \lambda$.

On appelle *pavé dyadique* tout pavé de la forme

$$\mathrm{P} = \prod_{i=1}^d \left[k_i \cdot 2^{-n_i}, (k_i+1)\cdot 2^{-n_i}\right[, \qquad \text{où} \quad (k_i) \in \mathbb{Z}^d \text{ et } (n_i) \in \mathbb{N}^d.$$

L'ensemble $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ des unions finies de pavés dyadiques est stable par intersection finie et engendre la tribu borélienne (il suffit d'imiter la preuve de l'exercice 5 du TD 1). Comme en outre $\mathscr{C}$ contient une famille croissante dénombrable d'éléments de mesure de Lebesgue finie recouvrant $\mathbb{R}^d$ tout entier, comme par exemple,

$$\mathrm{P}_n = [-2^n, 2^n[^d,$$

il suffit de vérifier que λ et μ' coïncident sur $\mathscr{C}$. Chaque élément de $\mathscr{C}$ étant une union disjointe de pavés dyadiques, il suffit même de démontrer cette égalité pour les intervalles dyadiques.
L'invariance par translation de μ implique celle de μ'. La mesure

$$\mu'\left(\prod_{i=1}^{d} \left[k_i \cdot 2^{-n_i}, (k_i+1)\cdot 2^{-n_i}\right[\right)$$

d'un pavé dyadique ne dépend donc que des paramètres $n_1, \dots, n_d$. Puisque

$$[0,1[^d = \prod_{i=1}^{d}\left(\bigsqcup_{k=0}^{2^{n_i}-1} \left[k\cdot 2^{-n_i}, (k+1)\cdot 2^{-n_i}\right[\right)$$

est l'union disjointe de $2^{n_1}\cdots 2^{n_d}$ pavés dyadiques de paramètres $n_1, \dots, n_d$, on a l'égalité

$$\begin{aligned}\mu'\left(\prod_{i=1}^{d}\left[2^{-n_i}\cdot k_i, 2^{-n_i}\cdot(k_i+1)\right[\right) &= \frac{\mu'\left([0,1[^d\right)}{2^{n_1}\cdots 2^{n_d}} \\ &= 2^{-n_1}\cdots 2^{-n_d} = \lambda\left(\prod_{i=1}^{d}\left[2^{-n_i}\cdot k_i, 2^{-n_i}\cdot(k_i+1)\right[\right),\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

(c) Commençons par traiter le cas où A est inversible. Soit $\mu = \mathrm{A}_*(\lambda)$. Par définition, c'est donc la mesure qui associe à un borélien $\mathrm{E} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ le nombre $\lambda\left(\mathrm{A}^{-1}[\mathrm{E}]\right)$. Nous allons démontrer $\mu = |\operatorname{dét} \mathrm{A}|^{-1}\lambda$ en utilisant la question précédente.
Soit $v \in \mathbb{R}^d$. Pour tout borélien $\mathrm{E} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mu(v+\mathrm{E}) = \lambda\left(\mathrm{A}^{-1}[v+\mathrm{E}]\right) = \lambda\left(\mathrm{A}^{-1}(v) + \mathrm{A}^{-1}[\mathrm{E}]\right) = \lambda\left(\mathrm{A}^{-1}[\mathrm{E}]\right) = \mu(\mathrm{E}).$$

Autrement dit, la mesure μ est invariante par translation. En outre, $\mathrm{A}^{-1}\left([0,1[^d\right)$ est inclus dans $\mathrm{A}^{-1}\left([0,1]^d\right)$ qui est compact. La mesure $r(\mathrm{A})$ de $\mathrm{A}^{-1}\left([0,1[^d\right)$ est donc finie. D'après la question précédente, il existe donc une application

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & \mathrm{A} & \mapsto & \lambda\left(\mathrm{A}^{-1}\left([0,1[^d\right)\right) \end{array}$$

telle que $\mathrm{A}_*(\lambda) = r(\mathrm{A})\lambda$. Si A et B sont des éléments de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, on a, pour tout $\mathrm{E} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{AB})_*(\lambda)(\mathrm{E}) &= \lambda\left((\mathrm{AB})^{-1}(\mathrm{E})\right) \\ &= \lambda\left(\mathrm{B}^{-1}\left(\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{E})\right)\right) \\ &= (\mathrm{B}_*\lambda)(\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{E})) = \mathrm{A}_*\left(\mathrm{B}_*(\mathrm{E})\right),\end{aligned}$$

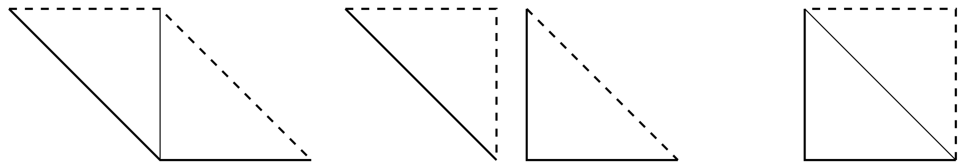

Figure 1 – Le parallélogramme P et le carré $[0,1[^2$ sont *équidécomposables.*

ce qui implique $(\mathrm{AB})_*(\lambda) = \mathrm{A}_*\left(\mathrm{B}_*(\lambda)\right)$ et donc $r(\mathrm{AB}) = r(\mathrm{A})\cdot r(\mathrm{B})$. Comme, tautologiquement, $r(\mathrm{id}) = 1$, l'application r est donc un morphisme de groupes $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^*$. Pour la déterminer exactement (en fait, pour démontrer que $r(\mathrm{A}) = |\det \mathrm{A}|^{-1}$), il suffit de la calculer sur un système générateur de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Nous allons donc calculer les valeurs que prend r sur :

– Les permutations $p_\sigma : (x_1, x_2, \ldots, x_d) \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(d)})$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}(d)$: chacune vérifie $p_\sigma^{-1}\left([0,1[^d\right) = [0,1[^d$ donc $r(p_\sigma) = 1$.
– Les dilatations $d_\lambda : (x_1, x_2, \ldots, x_d) \mapsto (\lambda x_1, x_2, \ldots, x_d)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$: l'image réciproque de $[0,1[^d$ est alors $]0,1/\lambda[\times [0,1[^{d-1}$ ou $]1/\lambda, 0[\times [0,1[^{d-1}$ suivant le signe de λ. Dans les deux cas, elle est de mesure $r(d_\lambda) = |\lambda|^{-1}$.
– La transvection $t : (x_1, x_2, \ldots, x_d) \mapsto (x_1 + x_2, x_2, \ldots, x_n)$: l'image réciproque de $]-1,1[^d$ est alors $\mathrm{P} \times]0,1[^{d-2}$ où P est le parallélogramme semi-ouvert $[0,1[\cdot(1,0) + [0,1[\cdot(1,1)$. Mais il existe une décomposition $\mathrm{P} = \mathrm{T}_1 \sqcup \mathrm{T}_2$ en deux triangles telle que $((1,0) + \mathrm{T}_1) \sqcup \mathrm{T}_2 = [0,1[^2$. Cela entraîne que P a une aire 1. En dimension supérieure, la décomposition correspondante du parallélotope $\mathrm{P} \times [0,1[^{d-2}$ en deux prismes à base triangulaire montre que

$$r(t) = \lambda\left(\mathrm{P} \times [0,1[^{d-2}\right) = 1.$$

Les morphismes de groupes $r, |\det|^{-1} : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+^*$ coïncidant sur une partie génératrice, ils coincident et on a donc bien

$$\forall \mathrm{E} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), (\mathrm{A}_*(\lambda))(\mathrm{E}) = \lambda\left(\mathrm{A}^{-1}[\mathrm{E}]\right) = |\det \mathrm{A}|^{-1} \cdot \lambda(\mathrm{E}).$$

Il reste à traiter le cas non inversible, c'est-à-dire de vérifier que si A est un endomorphisme non inversible, on a, pour tout borélien $\mathrm{E} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, l'égalité $\lambda\left(\mathrm{A}[\mathrm{E}]\right) = 0$. Il suffit en fait de le démontrer pour $\mathrm{E} = \mathbb{R}^d$, auquel cas $\mathrm{A}[\mathrm{E}] = \operatorname{im}\mathrm{A}$, c'est-à-dire de démontrer le résultat suivant.

Proposition. Soit $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}^d$ un espace vectoriel de dimension $d' < d$. On a alors $\lambda(\mathrm{F}) = 0$.

Preuve. La proposition est claire si F est par exemple $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{d'})$ pour $d' < d$: en effet, l'égalité

$$[0,1[^{d'} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left([0,1[^d \times \left[0, \frac{1}{n}\right[^{d-d'}\right)$$

montre que

$$\lambda\left([0,1[^{d'}\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left([0,1[^d \times \left[0, \frac{1}{n}\right[^{d-d'}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{d-d'}} = 0,$$

donc on peut en dire autant de

$$\mathrm{F} = \bigsqcup_{v\in\mathbb{Z}^{d'}} v + [0,1[^{d'} .$$

On peut alors se ramener à ce cas à l'aide de la propriété que nous venons de démontrer pour A inversible : soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un automorphisme linéaire tel que $\varphi[\mathrm{F}] = \mathrm{F}_0$. On a alors

$$0 = \lambda(\mathrm{F}_0) = |\,\mathrm{dét}\,\varphi| \cdot \lambda(\mathrm{F}),$$

donc $\lambda(\mathrm{F}) = 0$.

(d) Commençons par remarquer que l'hypothèse « tout point $p \in \mathrm{E}$ admet un voisinage de μ-mesure finie » exclut des exemples banals comme la mesure de comptage.

Puisque tout voisinage contient une boule de rayon strictement positif, nous allons utiliser cette hypothèse sous la forme de l'existence d'une boule (de rayon > 0) de mesure finie. Notre preuve reposera alors sur la propriété suivante de l'espace de Banach E (qui traduit le fait que sa dimension est infinie).

Lemme. Soit $\mathrm{R} > 0$. Alors toute boule (ouverte) de rayon R contient une infinité de boules (ouvertes) disjointes de rayon $\mathrm{R}/4$.

Cette propriété, jointe à la séparabilité de E (vue au TD 0), implique notre résultat. Voyons comment : les boules de même rayon sont images les unes des autres par des translations ; elles ont donc la même mesure. L'hypothèse implique l'existence de $\mathrm{R} > 0$ tel que la boule de rayon R est de mesure finie. La proposition permet de mettre une infinité de boules disjointes de rayon $\mathrm{R}/4$ dans cette boule. Toutes ces « petites » boules sont les images les unes des autres par des translations et ont donc la même mesure. Puisqu'il y en a une infinité dans une boule de mesure finie, toutes ces boules sont en fait de mesure nulle.

La séparabilité de E signifie qu'il existe une partie dénombrable dense $\mathrm{D} \subset \mathrm{E}$. Puisque tout point de E est alors arbitrairement proche d'un point de D, les boules de rayon $\mathrm{R}/4$ centrées en les points de D recouvrent E, qui est donc de mesure nulle. La seule mesure sur E localement finie et invariante par rotation est donc la mesure nulle.

Il nous reste à démontrer le lemme.

L'idée est relativement simple : on va prendre une suite x_n de points de $[0,1]$ et des fonctions continues $f_n : [0,1] \to [-1,1]$ telles que $f_n(x_n) = 1$ et $f_p(x_n) = -1$ dès que $p \neq n$. Les fonctions $\mathrm{R}/2 \cdot f_n$ sont alors de norme $\mathrm{R}/2$ (et les boules $\mathrm{B}(f_n, \mathrm{R}/4)$ sont donc comprises dans la boule $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$) et à distance R les unes des autres (donc ces mêmes boules sont disjointes).

On peut penser à de nombreuses constructions différentes pour exhiber de telles fonctions (par exemple des polynômes trigonométriques) ; pour notre part, nous allons utiliser des fonctions affines par morceaux très simples : prenons par exemple une famille $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles de $[0,1]$ dont les intérieurs sont disjoints (par exemple les intervalles dyadiques $[2^{-n-1}, 2^{-n}]$). On peut alors facilement définir une fonction f_n affine par morceaux telle que f_n vaut -1 en dehors de l'intervalle I_n, mais 1 en le centre x_n de I_n. Cela clôt la démonstration.