TD 3 : Formes méromorphes, fonctions harmoniques

Exercice 1. Résidus et degré global. Soit X une surface de Riemann et $f \in \mathscr{M}(\mathrm{X})$.

1. Montrer que $\omega = df/f$ est une différentielle méromorphe et déterminer ses résidus.
2. On suppose que X est compacte. En utilisant le théorème des résidus, redémontrer que f a autant de pôles que de zéros, si on les compte avec multiplicité.

Exercice 2. Fonction méromorphe sur le tore. En utilisant le théorème des résidus, montrer qu'un tore $\mathbb{C}/\Lambda$ n'admet pas de fonction méromorphe possédant un seul pôle, simple.

Exercice 3. Fonction de Green. Soit X une surface de Riemann et p un point de X. On choisit une uniformisante z au point p. Une *fonction de Green* de pôle p est une fonction harmonique $u : \mathrm{X} \setminus \{p\} \to \mathbb{R}$ telle que $u + \log|z|$ se prolonge continûment en p et que $u(x_n)$ tende vers 0 pour toute suite x_n sortant de tout compact de X.

1. Étant donné une fonction de Green u sur X et un biholomorphisme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, construire une fonction de Green sur Y.
2. Soit $p \in \mathbb{D}$. Construire une fonction de Green sur $\mathbb{D}$ de pôle p.
3. Déduire du principe du maximum qu'une fonction de Green est strictement positive.
4. Montrer qu'il n'y a pas de fonction de Green sur une surface de Riemann compacte, sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{D}^*$.

Exercice 4. Dessins locaux.

1. Soit $f = u + iu^*$ une fonction holomorphe définie sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}$. En fonction du degré de f en 0, dessiner les *équipotentielles* de u, c'est-à-dire ses lignes de niveau et les *lignes de champ*, c'est-à-dire les niveaux de u^*.
2. On appelle $2k$-pôle ($k \geqslant 1$) (resp. monopôle) une fonction harmonique $u : \mathrm{U} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que $u - \mathrm{Ré}\left(\frac{1}{z^k}\right)$ (respectivement $u + \ln|z|$) se prolonge continûment en p. Dessiner localement ses équipotentielles. Des lignes de champs naturelles apparaissent-elles ? Sont-elles les niveaux d'une fonction harmonique u^* ?

Exercice 5. Un peu de physique. Soit (X, g) une surface riemannienne (c'est-à-dire une variété riemannienne de dimension 2) orientée. On note aire la forme d'aire associée. On rappelle que l'opérateur J : « tourner d'un quart de tour dans le sens direct » définit une structure de surface de Riemann sur X.

1. Rappeler comment la donnée d'une métrique riemanienne donne naissance à un isomorphisme $\mathscr{X}(\mathrm{X}) \to \Omega^1(\mathrm{X}, \mathbb{R})$ entre les champs de vecteurs et les 1-formes réelles. On le note $\xi \mapsto \xi^\flat$ et on note $\alpha \mapsto \alpha_\sharp$ sa réciproque.
2. Étant donné un champ de vecteurs $\xi \in \mathscr{X}(\mathrm{X})$ on définit son rotationnel $\mathrm{rot}\,\xi : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ par

$$d(\xi^\flat) = (\mathrm{rot}\,\xi)\,\mathrm{aire}$$

   et sa divergence par $\mathrm{div}\,\xi = \mathrm{rot}(\mathrm{J}\xi)$. Exprimer le rotationnel et la divergence d'un champ de vecteurs dans $\mathbb{C}$ muni de la métrique euclidienne.

3. En deux dimensions, les équations de l'électrostatique (en dehors des charges) ou de la mécanique des fluides parfaits se ramènent au fait qu'un champ de vecteurs ξ (le champ électrique ou le champ des vitesses) est isochore (c'est-à-dire de divergence nulle) et arotationnel. Réexprimer ces équations en termes de $\xi^\flat$. Qu'en déduisez-vous ?
4. Que deviennent ces équations quand on suppose que le champ dérive d'un potentiel (c'est-à-dire qu'il s'écrit comme le gradient d'une fonction $u : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$) ?

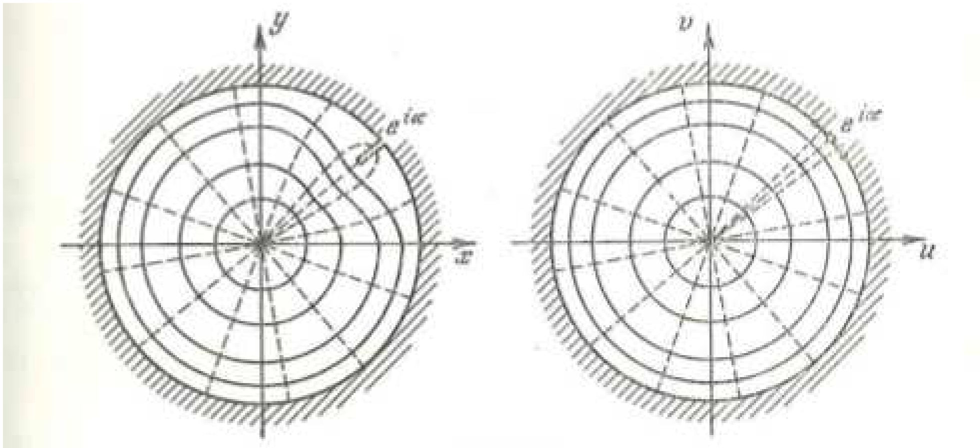

FIG. 57

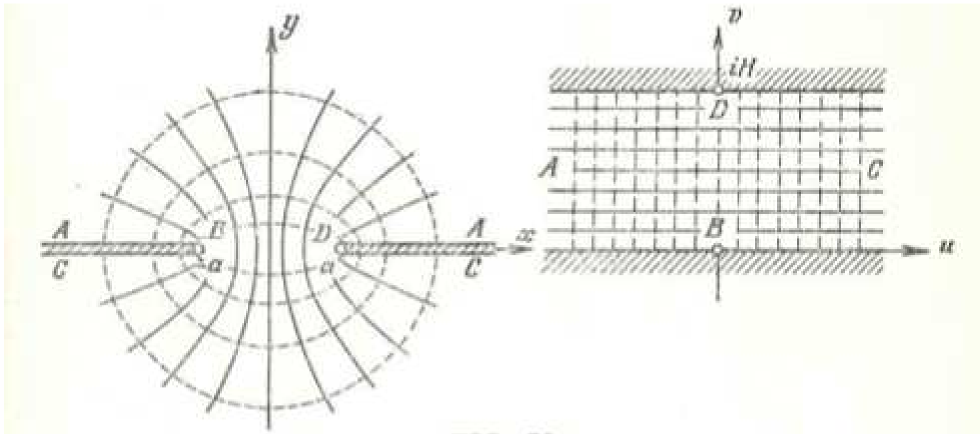

FIG. 58

FIGURE 1 – Dessins tirés de Lavrentiev & Chabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, éd. Mir