# TD 5

**Exercice 1. Un exemple.**

Soit $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$. Exhiber le revêtement universel de $C(r,R) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, r < |z| < R \right\}$.

**Exercice 2. Surfaces de Riemann revêtues par $\overline{\mathbb{C}}$ et $\mathbb{C}$.**

Le théorème d'uniformisation assure que toute surface de Riemann X est obtenue comme quotient d'un des trois modèles $\widetilde{X} \in \{\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}$ par un groupe d'automorphismes $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\widetilde{X})$ dont l'action vérifie la propriété suivante : tout point $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ admet un voisinage ouvert U tel que les translatés $(\gamma U)_{\gamma \in \Gamma}$ soient disjoints. Le but de l'exercice est de comprendre la structure de ces groupes dans les cas $\widetilde{X} = \overline{\mathbb{C}}$ et $\widetilde{X} = \mathbb{C}$.

1. Montrer que la propriété précedente implique que le groupe agit *sans point fixe* c'est-à-dire que $\forall \gamma \in \Gamma, (\exists \tilde{x} \in \widetilde{X} : \gamma \tilde{x} = \tilde{x}) \Rightarrow \gamma = 1_\Gamma$. En déduire que la seule surface de Riemann revêtue par $\overline{\mathbb{C}}$ est $\overline{\mathbb{C}}$.
2. À partir de maintenant, soit $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ un sous-groupe vérifiant la propriété énoncée au début de l'exercice. Montrer que $\Gamma$ est un groupe de translations.
3. Démontrer que $\Gamma$ est discret.
4. On suppose que $\Gamma$ contient deux éléments non nuls $\lambda$ et $\mu$ tels que $\lambda/\mu \notin \mathbb{R}$. Montrer qu'alors $\Gamma$ est de la forme $\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2$ avec $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbb{R}$.
5. Conclure qu'en général, $\Gamma$ est soit de cette forme, soit cyclique, soit trivial.

**Exercice 3. Petit théorème de Picard.**

1. Montrer qu'un plan privé de deux points n'est pas homéomorphe à une sphère, un tore, un plan ou un cylindre. En déduire que $\mathbb{C}$ privé de deux points est revêtu par $\mathbb{D}$.
2. Démontrer le *petit théorème de Picard* : une fonction entière $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ a au moins deux éléments est constante.

**Exercice 4. Courbes entières.** Quelles sont les surfaces de Riemann admettant un ouvert biholomorphe à $\mathbb{C}$ ?

**Exercice 5. Polynômes et racines.**

Si X est un espace topologique, on note $\mathrm{Sym}^n(X)$ son *produit symétrique*, c'est-à-dire le quotient de $X^n$ par le groupe symétrique $\mathfrak{S}(n)$, muni de la topologie quotient de la topologie produit. La classe de l'élément $(x_1, \dots, x_n)$ sera notée $\{x_1, \dots, x_n\}$ (attention : des répétitions sont possibles).

On note $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$ et ${}^1\mathbb{C}_n[X]$ le sous-espace affine des polynômes unitaires de degré $n$.

1. Montrer que l'application $L : {}^1\mathbb{C}_n[X] \to \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ qui associe à un polynôme P la liste non ordonnée de ses racines est une bijection d'inverse continue.
2. Expliquer comment ${}^1\mathbb{C}_n[X]$ peut-être vu comme une partie de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{C}_n[X]) \simeq \mathbb{CP}^n$.

3. On définit

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}^n(\overline{\mathbb{C}}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]) \\ \{z_1, \ldots, z_p, \infty, \ldots, \infty\} & \longmapsto & \left[\prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X} - z_i)\right] \end{array}.$$

   Montrer que $\sigma$ est une bijection continue prolongeant $\mathrm{L}^{-1} : \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) \to {}^1\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.
   *Indication :* vous pouvez essayer d'exprimer cette application en coordonnées homogènes en utilisant les *polynômes symétriques homogènes* :

$$\sigma_i^h((z_1, x_1), \ldots, (z_n, x_n)) = \sum_{\varphi \in \mathfrak{S}(n)} x_{\varphi(1)} \cdots x_{\varphi(i)} \cdot z_{\varphi(i+1)} \cdots z_{\varphi(n)}.$$

4. En déduire la continuité de l'application $\mathrm{L} : {}^1\mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \to \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ et les homéomorphismes $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{CP}^1) \simeq \mathbb{CP}^n$ et $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$.