
TD 1 : premiers exemples

Exercice 1. Biholomorphismes. Soit X et Y deux surfaces de Riemann. Montrer qu'une fonction $f : X \rightarrow Y$ est un biholomorphisme si et seulement si c'est une bijection holomorphe.

Exercice 2. Sphère de Riemann. On rappelle que la *sphère de Riemann* est l'ensemble $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ muni de l'atlas $\{(\mathbb{C}, \text{id}), (\mathbb{C}^\times \cup \{\infty\}, z \mapsto 1/z)\}$. C'est une surface de Riemann compacte (difféomorphe à la sphère).

1. Si f est une fonction méromorphe sur une surface de Riemann X dont l'ensemble des pôles est P , on définit $\tilde{f} : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \notin P$ et $f(x) = \infty$ pour $x \in P$. Montrer que $f \mapsto \tilde{f}$ définit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{M}(X)$ des fonctions méromorphes sur X et l'ensemble $\text{Hol}(X, \overline{\mathbb{C}}) \setminus \{\infty\}$ des fonctions $X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ holomorphes (et non identiquement égales à ∞). À partir de maintenant, on identifiera $\mathcal{M}(X)$ à cette partie de $\text{Hol}(X, \overline{\mathbb{C}})$.
2. Si $p \in X$ et $f \in \mathcal{M}(X) \subset \text{Hol}(X, \overline{\mathbb{C}})$ sont tels que $f(p) = \infty$, que vaut $\deg_p(f)$?
3. Montrer que $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(T)$ et déterminer $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}}) = \text{Hol}(\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$.

Exercice 3. Automorphismes. Le but de cet exercice est de déterminer les groupes d'automorphismes (*i.e.* de biholomorphismes) de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, de la droite \mathbb{C} et du disque \mathbb{D} .

1. Soit $f \in \mathbb{C}(T) = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ non constante, $P = f^{-1}[\{\infty\}]$ l'ensemble de ses pôles et $Z = f^{-1}[\{0\}]$ celui de ses zéros. Montrer que P et Z sont finis et déterminer $\sum_{p \in P} \deg_p(f)$ et $\sum_{z \in Z} \deg_z(f)$.
2. En déduire que tout automorphisme de $\overline{\mathbb{C}}$ s'écrit sous la forme $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ (on dit que c'est une *homographie*).
3. On note $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ le quotient du groupe $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ par son centre $Z(\text{GL}(2, \mathbb{C})) = \{\lambda \text{id} \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. Montrer que $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \simeq \text{PGL}(2, \mathbb{C})$.
4. Montrer $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \left\{ z \mapsto az + b \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}$.
5. À l'aide du lemme de Schwarz, montrer qu'un automorphisme de \mathbb{D} fixant 0 est une rotation.
6. En déduire $\text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto u \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \mid |u| = 1, a \in \mathbb{D} \right\}$.
7. Déduire de ce qui précède que $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ agit exactement 3-transitivement sur $\overline{\mathbb{C}}$, que $\text{Aut}(\mathbb{C})$ agit exactement 2-transitivement sur \mathbb{C} et que $\text{Aut}(\mathbb{D})$ agit exactement transitivement sur $\mathbb{D} \times S^1$.

Exercice 4. Uniformisation du demi-plan.

1. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\} & \rightarrow & \mathbb{D} \\ z & \mapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array}$ est un biholomorphisme.
2. Dédurre de l'exercice et de la question précédents le groupe $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$.

Exercice 5. Modules des anneaux. On appelle *anneau rond* tout domaine de la forme

$$C(r_1, r_2) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2 \right\},$$

où $0 \leq r_1 < r_2$. Le *module* d'un tel anneau est le réel $\log(r_2/r_1)$ (ou $+\infty$ si $r_1 = 0$).

1. Montrer que deux anneaux (ronds) de même module sont conformément équivalents (c'est-à-dire qu'il existe un biholomorphisme entre eux).
2. En utilisant le principe de réflexion de Schwarz, démontrer que tout biholomorphisme $f : C(r, 1) \rightarrow C(r', 1)$ s'étend en un biholomorphisme $\tilde{f} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$.
3. En déduire que deux anneaux ronds sont biholomorphes si et seulement s'ils ont même module.