TD 5 : Uniformisation et conséquences

Exercice 1. Uniformisation des surfaces de Riemann quelconques.
Démontrer la forme suivante du théorème d'uniformisation.

> *Soit* X *une surface de Riemann. Il existe un unique modèle* $\widetilde{\mathrm{X}} \in \{\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}$ *et un groupe* $\Gamma \leqslant \mathrm{Aut}(\mathrm{X})$ *opérant proprement et librement sur* $\widetilde{\mathrm{X}}$ *tels que* X *soit biholomorphe au quotient* $\widetilde{\mathrm{X}}/\Gamma$.

Exercice 2. Surfaces de Riemann revêtues par $\overline{\mathbb{C}}$.

1. Montrer que toute surface de Riemann dont le revêtement universel est biholomorphe à $\overline{\mathbb{C}}$ est biholomorphe à $\overline{\mathbb{C}}$.
2. Soit X une surface de Riemann telle qu'il existe une application holomorphe non constante de $\overline{\mathbb{C}}$ vers X. Montrer que X est biholomorphe à $\overline{\mathbb{C}}$.

Exercice 3. Surfaces de Riemann revêtues par $\mathbb{C}$.
Soit $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ un sous-groupe opérant proprement et librement sur $\mathbb{C}$.

1. Montrer que Γ est un groupe de translations.
2. Démontrer que Γ est discret.
3. On suppose que Γ contient deux éléments non nuls λ et μ tels que $\lambda/\mu \notin \mathbb{R}$. Montrer qu'alors Γ est de la forme $\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2$ avec $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbb{R}$.
4. Conclure qu'en général, Γ est soit de cette forme, soit cyclique, soit trivial.
5. Déterminer à biholomorphisme près les surfaces de Riemann revêtues par $\mathbb{C}$.

Exercice 4. Un exemple.
Soit $0 \leqslant r < \mathrm{R} \leqslant \infty$. Exhiber le revêtement universel de $\mathrm{C}(r, \mathrm{R}) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, r < |z| < \mathrm{R} \right\}$.

Exercice 5. Petit théorème de Picard.

1. Montrer qu'un plan privé de deux points n'est pas homéomorphe à une sphère, un tore, un plan ou un cylindre. En déduire que $\mathbb{C}$ privé de deux points est revêtu par $\mathbb{D}$.
2. Démontrer le *petit théorème de Picard* : une fonction entière $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ telle que $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ a au moins deux éléments est constante.

Exercice 6. Surfaces de Riemann contenant les modèles. Quelles sont les surfaces de Riemann admettant un ouvert biholomorphe à $\overline{\mathbb{C}}$? à $\mathbb{C}$? à $\mathbb{D}$?

Exercice 7. Métrique de Poincaré.

1. Montrer qu'il existe une unique métrique riemannienne sur $\mathbb{D}$, à multiplication près par un scalaire, qui soit invariante sous l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. C'est (une des définitions de) la *métrique de Poincaré,* ou *métrique hyperbolique.* Quel est le groupe des isométries de cette métrique ?

2. Exprimer la distance pour cette métrique riemannienne entre deux points de $\mathbb{D}$ (on pourra commencer par le cas où l'un d'eux est 0). Démontrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ agit transitivement sur les couples de points à même distance.
3. Démontrer que les fonctions holomorphes $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sont 1-lipschitziennes pour cette distance (*lemme de Schwarz-Ahlfors-Pick*).
4. Démontrer qu'il n'existe pas de métrique riemannienne invariante par $\mathrm{Aut}(X)$ dans les cas $X = \mathbb{C}$, $X = \overline{\mathbb{C}}$.

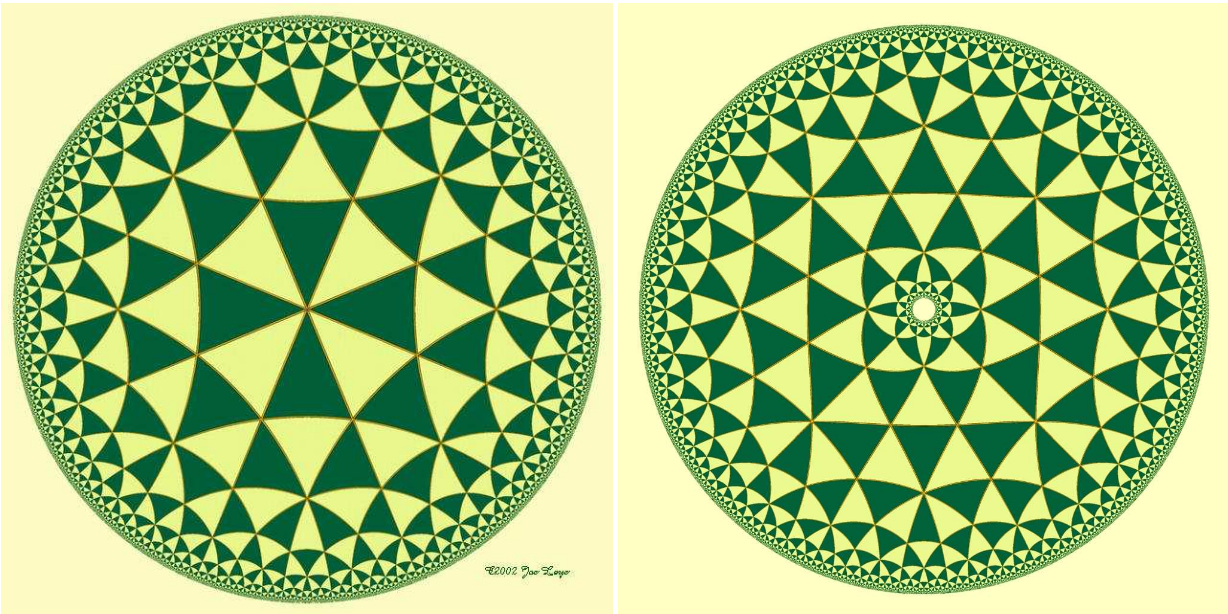

FIGURE 1 – Dessins dus à Jos Leys, `http://www.josleys.com`