TD 6 : Automorphismes

Exercice 1. Transitivité forte du groupe des difféomorphismes.
Démontrer que le groupe des difféomorphismes d'une variété réelle connexe de dimension au moins 2 agit n-transitivement, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Qu'en est-il pour une variété de dimension 1 ?

Exercice 2. Automorphismes des tores.

1. Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$. On définit $G_\Lambda = \left\{ a \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, a\Lambda = \Lambda \right\}$. Montrer que G_Λ est isomorphe à un des groupes cycliques C_2, C_4 ou C_6 et préciser les réseaux Λ correspondant à chacun de ces trois cas.
2. En déduire les groupes d'automorphismes des tores $\mathbb{C}/\Lambda$.
3. Démontrer l'existence d'une métrique riemannienne sur $\mathbb{C}/\Lambda$ dont le groupe des isométries contient $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$.

Exercice 3. Théorème de finitude de Schwarz.
Le but de cet exercice est de démontrer que le groupe des automorphismes d'une surface de Riemann compacte et hyperbolique (*i.e.* revêtue par $\mathbb{D}$) est fini.

1. Soit X une surface de Riemann de revêtement universel $\pi : \mathbb{D} \to X = \mathbb{D}/\Gamma$. Expliquer comment X hérite d'une métrique riemannienne par ce procédé et démontrer que la distance associée est
$$d_X(x,y) = \inf_{\tilde{y} \in \pi^{-1}(y)} d_{\mathbb{D}}(\tilde{x},\tilde{y}),$$
où $\tilde{x}$ est n'importe quel point tel que $\pi(\tilde{x}) = x$ et $d_{\mathbb{D}}$ est la distance de Poincaré.
2. On munit Aut(X) de la topologie de la convergence uniforme associée à la distance d_X, définie par la distance
$$d_G(g,g') = \sup_{x \in X} d_X(g(x), g'(x)).$$
Démontrer qu'il est alors compact.
3. Soit $\Gamma^\sharp = \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Démontrer que $\delta = \inf_{a \in \mathbb{D}} \inf_{\gamma \in \Gamma^\sharp} d_{\mathbb{D}}(a, \gamma a) > 0$.
4. Démontrer que $\forall g \in \mathrm{Aut}(X)$, $d_G(\mathrm{id}_X, g) < \dfrac{\delta}{2} \Rightarrow g = \mathrm{id}_X$ et en déduire le résultat.

   Remarque. Les surfaces concernées par ce résultat de finitude sont exactement les surfaces de Riemann compactes de genre $g \geqslant 2$. Un théorème d'Hurwitz raffine alors ce résultat en démontrant que si $g = g(X) \geqslant 2$, Aut(X) a au plus $84(g-1)$ éléments.

Exercice 4. Éléments de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ **et classification des anneaux.**
Dans tout l'exercice, on considère $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et son action par biholomorphismes sur $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$, voire son prolongement à $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \sqcup S^1$.

1. Démontrer que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agit exactement 2-transitivement sur les points de S^1. Agit-il 3-transitivement sur les points de S^1 ? Déterminer le stabilisateur de $(1,-1)$.

2. Démontrer que tout élement $f \neq \pm\mathrm{id}$ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, vu comme application $\overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$, est d'un des types suivants :
   - *(elliptique)* f admet un seul point fixe, dans $\mathbb{D}$.
   - *(parabolique)* f admet un seul point fixe, dans S^1.
   - *(hyperbolique)* f admet deux points fixes, dans S^1.
3. Démontrer que tout élément elliptique est conjugué dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ à un élément de la forme $z \mapsto uz$ ($u \in \mathrm{S}^1$) et que tout élément parabolique (resp. hyperbolique) est conjugué dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ à $z \mapsto z+1$ (resp. un élément de la forme $z \mapsto e^{\tau} z$, pour un certain $\tau \in \mathbb{R}$).
4. Soit A un anneau, c'est-à-dire une surface de Riemann homéomorphe à $\mathbb{C}^*$. Montrer que A est soit biholomorphe à $\mathbb{C}^*$, soit à un quotient $\mathbb{H}/\langle\gamma\rangle$, avec $\gamma \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.
5. Démontrer alors que tout anneau est biholomorphe à $\mathbb{C}^*$ où à l'anneau rond de module m $\mathrm{A}_m = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 < |z| < e^m \right\}$. Dans ce dernier cas, préciser la valeur du module en fonction de γ. (On pourra démontrer puis utiliser que le quotient de la bande de hauteur h par la translation de longueur τ est un anneau rond de module $2\pi h/\tau$.)