TD 8 : Théorème de Riemann-Roch

Exercice 1. Quelques conséquences du théorème de Riemann-Roch.
Soit X une surface de Riemann compacte de genre g et $\mathrm{D} \in \mathrm{Div}(\mathrm{X})$.

1. Montrer les propriétés suivantes :
   (i) $\deg \mathrm{D} < 0 \Longrightarrow \ell(\mathrm{D}) = 0$;
   (ii) $-1 \leqslant \deg \mathrm{D} \leqslant g-1 \Longrightarrow 0 \leqslant \ell(\mathrm{D}) \leqslant 1 + \deg \mathrm{D}$;
   (iii) $g-1 \leqslant \deg \mathrm{D} \leqslant 2g-1 \Longrightarrow 1-g+\deg \mathrm{D} \leqslant \ell(\mathrm{D}) \leqslant g$;
   (iv) $\deg \mathrm{D} \geqslant 2g-1 \Longrightarrow \ell(\mathrm{D}) = 1-g+\deg \mathrm{D}$.
2. En déduire qu'il existe une application holomorphe $f : \mathrm{X} \to \overline{\mathbb{C}}$ de degré $\leqslant g+1$.

Exercice 2. Riemann-Roch sur la sphère de Riemann.
1. Quel est le groupe de Picard de $\overline{\mathbb{C}}$?
2. Soit D un diviseur quelconque sur $\overline{\mathbb{C}}$. Déterminer $\ell(\mathrm{D})$ et vérifier le théorème de Riemann-Roch sur ces exemples.

Exercice 3. Diviseur d'intersection.
Soit $\mathrm{X} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ une courbe complexe lisse. Soit également $\mathrm{G} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ homogène ne s'annulant pas identiquement sur X. On construit un diviseur div G dont le support est le lieu d'annulation de G sur X de la façon suivante.

1. Soit $x \in \mathrm{X}$ un point d'annulation de G. Montrer qu'il existe H homogène de même degré que G ne s'annulant pas en x, et que G/H définit une fonction méromorphe sur X ayant un zéro en x. On note n_x l'ordre de cette fonction en ce point.
2. Montrer que l'entier $n_x > 0$ ne dépend pas du choix de H. On note $\mathrm{div}\, \mathrm{G} = \sum n_x x$ le *diviseur d'intersection de* G.
3. Montrer que si G_1 et G_2 sont deux polynômes homogènes, $\mathrm{div}(\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2) = \mathrm{div}\, \mathrm{G}_1 + \mathrm{div}\, \mathrm{G}_2$.
4. Montrer que si G_1 et G_2 sont deux polynômes homogènes de même degré, $\mathrm{div}\, \mathrm{G}_1$ et $\mathrm{div}\, \mathrm{G}_2$ sont linéairement équivalents. Dans le cas du degré 1, on appelle ce diviseur (ou plutôt cette classe de diviseurs) le *diviseur hyperplan* de X.

Exercice 4. Diviseurs très amples.
Soit X une surface de Riemann compacte.

1. Soit D un diviseur sur X. On note |D| son *système linéaire complet*, c'est-à-dire l'ensemble des diviseurs effectifs qui lui sont linéairement équivalents. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathrm{L}(\mathrm{D})) & \to & |\mathrm{D}| \\ [f] & \mapsto & \mathrm{div}(f) + \mathrm{D} \end{array}$$
est une bijection.

2. Un point $x \in \mathrm{X}$ est un *point base* du système linéaire complet $|\mathrm{D}|$ si tous les diviseurs $\mathrm{D}' \in |\mathrm{D}|$ le contiennent (c'est-à-dire vérifient $\mathrm{D}' \geqslant x$). Montrer que $x \in \mathrm{X}$ est un point base de $|\mathrm{D}|$ si et seulement si $\mathrm{L}(\mathrm{D}-p)=\mathrm{L}(\mathrm{D})$.
3. Soit $f=(f_0,\dots,f_n)$ un $(n+1)$-uplet non nul de fonctions méromorphes sur X. On définit une application
$$\varphi_f : \begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & [f_0(x):f_1(x):\cdots:f_n(x)] \end{array}$$
qui est bien définie et holomorphe au voisinage de tout point qui n'est le pôle d'aucun des f_i et qui n'en est pas un zéro commun.
Montrer que φ_f se prolonge en une application holomorphe non constante $\mathrm{X} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
4. Dans toute la suite, D sera un diviseur tel que $|\mathrm{D}|$ soit sans point base.
Montrer que la construction précédente appliquée à une base de $\mathrm{L}(\mathrm{D})$ construit une application holomorphe $\varphi_\mathrm{D} : \mathrm{X} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, où $n=\ell(\mathrm{D})-1$ est la dimension (projective) de $|\mathrm{D}|$, bien définie modulo l'action de $\mathrm{PGL}(n+1,\mathbb{C})$.
5. Soit $x \in \mathrm{X}$. Montrer qu'il existe une base $f_0, f_1, \dots, f_n$ de $\mathrm{L}(\mathrm{D})$ telle que $\deg_x f_0 = -\mathrm{D}(x)$ et $\forall i \geqslant 1$, $\deg_x f_i > -\mathrm{D}(p)$.
6. Soit p et q deux points distincts de X. Alors $\varphi_\mathrm{D}(p)=\varphi_\mathrm{D}(q)$ si et seulement si
$$\mathrm{L}(\mathrm{D}-p)=\mathrm{L}(\mathrm{D}-q).$$
Montrer en outre que si $\mathrm{L}(\mathrm{D}-p)=\mathrm{L}(\mathrm{D}-q)$, cet espace est également $\mathrm{L}(\mathrm{D}-p-q)$. En déduire que φ_D est injective si et seulement si, pour tous points p et q de X distincts, on a $\ell(\mathrm{D}-p-q)=\ell(\mathrm{D})-2$.
7. Supposons maintenant que D soit tel que φ_D soit injective. Soit $x \in \mathrm{X}$. Alors l'image de φ_D est une surface de Riemann plongée au voisinage de $\varphi_\mathrm{D}(x)$ si et seulement si $\mathrm{L}(\mathrm{D}-2p) \neq \mathrm{L}(\mathrm{D}-p)$.
8. On a donc montré que $\varphi_\mathrm{D} : \mathrm{X} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est un plongement holomorphe si et seulement si pour tous points p et $q \in \mathrm{X}$, $\ell(\mathrm{D}-p-q)=\ell(\mathrm{D})-2$. On dit alors que le diviseur D est *très ample.* [1] Montrer que tout diviseur de degré >0 sur $\overline{\mathbb{C}}$ est très ample.
9. Montrer que si le genre de X est g, tout diviseur de degré $\geqslant 2g+1$ est très ample.

Exercice 5. Application canonique.
Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g \geqslant 1$.

1. Montrer que si $x \in \mathrm{X}$, $\ell(x)=1$.
2. En déduire que le système linéaire complet du diviseur canonique $|\mathrm{K}_\mathrm{X}|$ n'a pas de point base. On note $\varphi_\mathrm{K} : \mathrm{X} \to \mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})$ l'application que ce système définit via la construction de l'exercice précédent.
3. Montrer que toute surface de Riemann compacte de genre 2 est *hyperelliptique*, c'est-à-dire qu'elle admet une application holomorphe de degré 2 à valeurs dans $\overline{\mathbb{C}}$.
4. Montrer que si la surface de Riemann X n'est pas hyperelliptique, alors le diviseur canonique est très ample.

Indication : on peut traiter les deux dernières questions simultanément en étudiant ce qui se passe quand φ_K n'est pas un plongement.

1. "This terminology is horrible but standard." – Rick Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces.*