UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER — Année 2008/2009

Master 2 de mathématiques — Théorie géométrique des groupes

Novembre 2008

Contrôle continu du 4 novembre 2008

Durée 2h

Documents autorisés.

Sauf mention du contraire, les réponses peuvent être justifiées assez rapidement mais de façon convaincante.

Exercice 1

Soit n un entier non nul. On considère la présentation $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} =< a \mid a^n = 1 >$.

On note $\mathcal{C}$ le 2-complexe de Cayley associé à cette présentation. On munit $\mathcal{C}$ d'une métrique compatible avec sa topologie.

1. (ne pas justifier la réponse à cette question) Décrire topologiquement les petites boules de $\mathcal{C}$. Précisément, pour tout point x de $\mathcal{C}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que les boules centrées en x de rayon inférieur à ϵ sont homéomorphes à un espace qu'on décrira.

On note $p : \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ le revêtement universel de $\mathcal{C}$.

2. Quel est le nombre de sommets, d'arêtes et de faces (2-cellules) de $\tilde{\mathcal{C}}$?

3. Déterminer $\tilde{\mathcal{C}}$.

Exercice 2

Donner (avec justifications) un sous-groupe du groupe libre $F(a, b)$ de rang 2 qui est un groupe libre de rang infini. Donner une base de ce sous-groupe.

Exercice 3

Soit $G =< X \mid R >$ une présentation d'un groupe G. On note $\mathcal{N}(R)$ le sous-groupe normal du groupe libre $F(X)$ engendré par R.

Pour tout $x \in \mathcal{N}(R)$, il existe $k \in \mathbb{N}$, $r_1, ..., r_k \in R \cup R^{-1}$ et $x_1, ..., x_k \in F(X)$ tels que $x = x_1 r_1 x_1^{-1} ... x_k r_k x_k^{-1}$. On dit qu'une telle écriture est minimale si k est minimal pour cette propriété. On appelle un tel entier k minimal l'*aire (combinatoire)* de x et on le note $A(x)$. Cette notion est relative à la présentation de G.

On admet le fait suivant qui précise l'existence des diagrammes : avec les notations ci-dessus, si x est un mot réduit et si $x = x_1 r_1 x_1^{-1} ... x_k r_k x_k^{-1}$, alors il existe un diagramme D représentant x dont les faces correspondent injectivement aux relations r_i, précisément tel qu'il existe une injection ϕ de l'ensemble des faces de D dans l'ensemble $\{1, ..., k\}$ de sorte que toute face w de D représente la relation $r_{\phi(w)}$.

On considère la présentation $\mathbb{Z}^2 =< a, b \mid [a, b] = 1 >$. On note $\mathcal{C}$ son 2-complexe de Cayley et $\tilde{\mathcal{C}}$ son revêtement universel. Le 2-complexe $\tilde{\mathcal{C}}$ a pour espace topologique sous-jacent le plan $\mathbb{R}^2$ pointé en $(0, 0)$, pour 0-squelette l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ et pour 1-squelette $(\mathbb{Z}\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times\mathbb{Z})$. On associe au générateur a les lignes horizontales et au générateur b les lignes verticales.

1. Dessiner pour $n = 3$ un diagramme représentant le mot $a^n b^n a^{-n} b^{-n}$ trivial dans $\mathbb{Z}^2$. Montrer que $A(a^n b a^{-n} b^{-1}) \leq n$ et que $A(a^n b^n a^{-n} b^{-n}) \leq n^2$ pour tout entier n.

Soit n un entier.

2. On considère un diagramme D représentant le mot $a^n b^n a^{-n} b^{-n}$. Montrer que l'image de D dans $\tilde{\mathcal{C}}$ par le morphisme naturel de 2-complexes contient tous les points du carré $]0, n[\times]0, n[$.

3. En déduire que $A(a^n b^n a^{-n} b^{-n}) = n^2$.

Avec les notations précédentes, on considère la fonction $f_{<X \mid R>} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$f(n) = \max_{x\in B(n)} A(x)$$

où $B(n)$ désigne la boule de rayon n de $F(X)$ (l'ensemble des mots réduits de longueur inférieure ou égale à n). On appelle cette fonction la *fonction de Dehn* de la présentation, elle quantifie la relation entre les longueurs des relations et leurs aires combinatoires (relations d'*isopérimétrie*).

La dernière question montre par exemple que pour tout entier n on a $f_{<a,b \mid [a,b]=1>}(4n) \geq n^2$.

4. Montrer que si la présentation $< X \mid R >$ est à petite simplification $C'(\frac{1}{6})$, alors pour tout entier $n > 0$ on a $f_{<X \mid R>}(n) \leq n$.