DM 04 : sommes

Les quatre exercices du devoir sont indépendants. Le dernier, sans être absolument redoutable, est plus difficile que les précédents.

Exercice 1. Minoration d'Oresme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $H_{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$.
3. En utilisant les outils du lycée, qu'en déduit-on sur la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Exercice 2. Écriture en base $\pm b$.

1. **Écriture en base** b. Soit $b \geqslant 2$ un entier. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, on considère

$$\varphi_\ell : \begin{cases} [\![0, b-1]\!]^\ell & \to [\![0, b^\ell - 1]\!] \\ (c_0, \ldots, c_{\ell-1}) & \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} c_k \, b^k. \end{cases}$$

   (a) Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Montrer que φ_ℓ est bien définie et injective. Qu'en déduit-on ?

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique suite presque nulle (c'est-à-dire nulle à partir d'un certain rang) $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, c_k \in [\![0, b-1]\!] \qquad \text{et} \qquad \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \, b^k = n.$$

   (Remarquons que, même si la somme a superficiellement l'air infini, la presque-nullité de $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ fait qu'il s'agit en fait d'une somme finie dès que l'on ignore les 0).

2. **Écriture en base** $-b$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe une unique suite presque nulle $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, c_k \in [\![0, b-1]\!] \qquad \text{et} \qquad \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \, (-b)^k = n.$$

3. Donner les écritures en base 7 et en base -7 de l'entier 1563.

Exercice 3. Inversion de Möbius-Pascal.

1. **La formule.**
   (a) Soit $0 \leqslant k \leqslant n$ deux entiers naturels.
   En faisant attention aux cas particuliers, calculer la somme

$$\mu(k,n) = \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{q} \binom{n-q}{k}.$$

   (b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On définit sa *transformée binomiale* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   En utilisant la question précédente, montrer la *formule d'inversion*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} b_p.$$

2. **Une application.** On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$e_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = n\, e_{n-1} + (-1)^n.$$

   On considère aussi sa transformée binomiale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Après avoir calculé $(e_n)_{n=0}^{5}$ et en avoir déduit $(f_n)_{n=0}^{5}$, donner (en la démontrant !) une expression pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Exercice 4. Majoration des écarts d'une suite de moyennes.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leqslant 1$. On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_{n+1} - v_n| \leqslant \frac{1}{2}$.