DM 07 : inégalité de Fejér-Jackson [corrigé]

Problème.

Inégalité de Fejér-Jackson (1911). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall x \in]0, \pi[\,, \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} > 0. \tag{FJ$_n$}$$

Après quelques préliminaires, le problème se lance dans une démonstration par récurrence de ces inégalités, les parties II et III (qui sont indépendantes) fournissant deux arguments différents pour l'étape d'hérédité.

Partie I. Préliminaires.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(2x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ et en déduire les inégalités (FJ_1), (FJ_2) et (FJ_3).

   On a $\sin(2x) = 2\,\sin(x)\,\cos(x)$. *Par ailleurs,*

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \operatorname{Im} e^{i3x} \\
&= \operatorname{Im}\left[(\cos x + i\,\sin x)^3\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\cos^3 x + 3i\,\cos^2 x\,\sin x - 3\,\cos x\,\sin^2 x - i^3\,\sin^3 x\right] && \textit{(Newton)} \\
&= 3\cos^2 x\,\sin x - \sin^3 x \\
&= \sin x\left(3\cos^2 x - \sin^2 x\right) \\
&= \sin x\left(4\cos^2 x - 1\right).
\end{aligned}$$

   On a notamment $\sin x > 0$ *et* $\cos x \in]-1, 1[$, *donc* $1 + \cos x > 0$.

   - *L'inégalité sur le sinus montre déjà* (FJ_1).
   - *D'après les calculs précédents,*

$$\sin x + \frac{\sin(2x)}{2} = \sin x + \sin x \cos x = \sin x\,(1 + \cos x) > 0,$$

     d'où (FJ_2).
   - *De même,*

$$\begin{aligned}
\sin x + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} &= \sin x\left(1 + \cos x + \frac{1}{3}\left(4\cos^2 x - 1\right)\right) \\
&= \frac{4}{3}\,\sin x\left(\cos^2 x + \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

     Après calcul, le polynôme unitaire du second degré $X^2 + \frac{3}{4}X + \frac{1}{2}$ *est de discriminant négatif et ne prend donc sur* $\mathbb{R}$ *que des valeurs strictement positifs, ce qui montre que les termes du produit précédent sont strictement positifs, et donc que* (FJ_3) *est vraie.*

La question précédente tient lieu d'initialisation, ce qui fait que l'on aura montré l'inégalité de Fejér–Jackson en toute généralité si l'on montre l'hérédité, soit sous forme simple :

$$\forall n \geqslant 2, (\mathrm{FJ}_{n-1}) \Rightarrow (\mathrm{FJ}_n) \tag{H}$$

soit sous forme forte :

$$\forall n \geqslant 2, ((\mathrm{FJ}_1) \text{ et } (\mathrm{FJ}_2) \text{ et} \ldots \text{et } (\mathrm{FJ}_{n-1})) \Rightarrow (\mathrm{FJ}_n). \tag{HF}$$

Ce sont, respectivement, les objectifs des parties II et III, qui fournissent donc deux démonstrations essentiellement indépendantes de l'inégalité de Fejér-Jackson.
Dans toute la suite, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_n : \begin{cases} [0, \pi] \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}. \end{cases}$$

2. **Sommes trigonométriques.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, \pi[$.
   (a) Montrer que f_n est dérivable et donner l'expression de sa dérivée.

   La fonction f_n est dérivable par opérations, sa dérivée est $f_n' : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

   (b) Montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

   On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} &= \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{i(\ell+1)x} && \begin{bmatrix} k = \ell + 1 \\ \ell = k - 1 \end{bmatrix} \\
&= e^{ix} \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(e^{ix}\right)^{\ell} \\
&= e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} && \textit{(car } e^{ix} \neq 1\textit{)} \\
&= e^{ix} \frac{e^{i\frac{n}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{i\frac{n}{2}x} - e^{-i\frac{n}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{2i \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

   On obtient les résultats demandés en passant aux parties réelle et imaginaire.

   (c) En déduire

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Les formules

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sin a\, \cos b = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2} \\ \sin a\, \sin b = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \end{cases}$$

donnent immédiatement

$$\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2}$$

$$\text{et} \qquad \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2}.$$

Ajoutées à la question précédente, ces égalités concluent.

3. **Une somme double.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=\ell}^{n}\frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

On a $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=\ell}^{n}\frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k}\frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *(somme constante de* k *termes).*

Partie II. Démonstration par étude d'une fonction.

Dans cette partie, on va montrer l'hérédité « simple » (H).

Soit donc $n \geqslant 2$ tel que (FJ_{n-1}). On va montrer $\forall x \in]0, \pi[\,, f_n(x) > 0$ en étudiant la fonction f_n.

4. On définit $m = \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$ le premier entier impair $\geqslant n$.

   Pour tout $j \in [\![0, m]\!]$, on définit alors $x_j = \begin{cases} \dfrac{j}{n}\pi & \text{si } j \text{ est pair} \\ \dfrac{j}{n+1}\pi & \text{si } j \text{ est impair.} \end{cases}$

   (a) Montrer les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{si } n \text{ pair :} \qquad & 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = \pi \\ \text{si } n \text{ impair :} \qquad & 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < \pi. \end{aligned}$$

Les définitions rendent clair que

$$\textit{si } n \textit{ pair :} \qquad \begin{cases} 0 = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = \pi \\ 0 < x_1 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_{n+1} = \pi \end{cases}$$

$$\textit{si } n \textit{ impair :} \qquad \begin{cases} 0 = x_0 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < \pi \\ 0 < x_1 < x_3 < \cdots < x_n < \pi. \end{cases}$$

Pour obtenir les inégalités demandées, il reste à « interclasser » les termes de rang pair et impair. Il suffit en fait de montrer que pour tout entier pair $0 < j < n$*, on a* $x_{j-1} < x_j < x_{j+1}$*. (En effet, on a directement* $x_0 = 0 < x_1$ *et, dans le cas* n *pair, l'égalité* $x_n = \pi > x_{n-1}$*).*
Soit donc $j \in [\![2, n-1]\!]$ *un entier pair. On a*

$$\begin{aligned}
x_j - x_{j-1} &= \frac{j}{n}\pi - \frac{j-1}{n+1}\pi \\
&= (j(n+1) - (j-1)n)\,\frac{\pi}{n(n+1)} \\
&= (n+j)\frac{\pi}{n(n+1)} \\
\textit{et}\quad x_{j+1} - x_j &= \frac{j+1}{n+1}\pi - \frac{j}{n}\pi \\
&= ((j+1)n - j(n+1))\,\frac{\pi}{n(n+1)} \\
&= (n-j)\frac{\pi}{n(n+1)},
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

(b) Montrer que pour tout entier **pair** $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a $f_n(x_j) > 0$.

Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$ *pair.*
On a

$$\begin{aligned}
f_n(x_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\,x_j)}{k} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(k\,x_j)}{k} + \frac{\sin(n\,x_j)}{n} \qquad \textit{(Chasles)} \\
&= f_{n-1}(x_j) + \frac{\sin(j\,\pi)}{n} = f_{n-1}(x_j) > 0,
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence (FJ_{n-1})*, applicable ici car* $x_j \in \,]0, \pi[$*.*

5. (a) Montrer que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont exactement les points d'annulation de f_n'.

Les questions 2a et 2b montrent que l'on obtient les points d'annulation de f_n' *sur* $]0, \pi[$ *en rassemblant :*

- *les points d'annulation de* $x \mapsto \sin\left(\frac{n}{2}x\right)$ *sur* $]0, \pi[$ *;*
- *les points d'annulation de* $x \mapsto \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)$ *sur* $]0, \pi[$*.*

Déterminons ces deux familles de points séparément.

- *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. On a*

$$\sin\left(\frac{n}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{2}x \equiv 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod{2\pi/n}.$$

Ces points d'annulation sont donc les points de la famille $\left(\frac{2\ell\,\pi}{n}\right)_{\ell \in \mathbb{Z}}$*.*
Pour qu'un tel point $\frac{2\ell\,\pi}{n}$ *appartienne à l'intervalle* $]0, \pi[$*, il faut et il suffit que* $0 < 2\ell < n$*.*
On obtient ainsi les points de la famille $(x_j)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ j \text{ pair}}}$*, que l'on peut réécrire* $(x_j)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \text{ pair}}}$ *si* n *est impair.*

- *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. On a*

$$\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n+1}{2}x \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{n+1} \pmod{2\pi/(n+1)}.$$

Ces points d'annulation sont donc les points de la famille $\left(\dfrac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\right)_{\ell\in\mathbb{Z}}$.

Pour qu'un tel point $\dfrac{(2\ell+1)\pi}{n+1}$ *appartienne à* $]0,\pi[$, *il faut et il suffit que* $0 < 2\ell+1 < n+1$.

On obtient ainsi les points de la famille $(x_j)_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j \text{ impair}}}$.

En rassemblant les deux types de points, on obtient que les points d'annulation de f_n' *sur* $]0,\pi[$ *sont* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, *et* x_n *dans le cas où* n *est impair.*

Il reste à préciser le cas des extrémités du segment $[0,\pi]$, *points en lesquels la formule 2b n'est pas valable.*

- *On a* $f_n(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(0) = n > 0$, *donc* $0 = x_0$ *n'est pas un point d'annulation.*
- *On a*

$$\begin{aligned} f_n(\pi) = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\pi) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \\ &= -\frac{1-(-1)^n}{2} \qquad\qquad \textit{(somme géométrique, } -1 \neq 1\textit{)} \\ &= \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ pair} \\ -1 & \textit{si } n \textit{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, si n *est impair, il n'y a rien à ajouter pour obtenir les points d'annulation sur* $[0,\pi]$ *; si* n *est pair, il faut rajouter le point* $\pi = x_n = x_{n+1}$.

In fine, *dans tous les cas, les points d'annulation de* f_n' *sont les points de la famille* $(x_j)_{j=1}^{m}$.

(b) Montrer que, pour tout entier **pair** $j \in [\![0, n-1]\!]$, f_n croît strictement sur le segment $[x_j, x_{j+1}]$.

Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$ *pair. On note* $k = \dfrac{j}{2}$.

Pour contourner le fait que la formule 2b n'est pas valable en 0, *on va supposer momentanément que* $j > 0$.

Remarquons déjà que, comme $\forall x \in\ ]0,\pi[\,, \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) > 0$, $f_n'(x)$ *est du même signe que le produit* $\cos\left(\dfrac{n}{2}x\right)\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)$.

Soit $x \in [x_j, x_{j+1}] = \left[\dfrac{j}{n}\pi, \dfrac{j+1}{n+1}\pi\right]$, *segment de longueur* $(n-j)\dfrac{\pi}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{\pi}{n+1}$, *d'après la question précédente.*

- *Le segment* $S_1 = \left[\dfrac{n}{2}x_j, \dfrac{n}{2}x_{j+1}\right]$ *est de longueur* $\leqslant \dfrac{n}{2} \times \dfrac{\pi}{n+1} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ *et sa borne inférieure est* $\dfrac{n}{2}x_j = \dfrac{j}{2}\pi = k\pi$, *de telle sorte que* $S_1 \subseteq \left[k\pi, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$.
  Comme $\dfrac{n}{2}x \in S_1$, *on en déduit que* $\cos\left(\dfrac{n}{2}x\right)$ *est du signe de* $(-1)^k$, *au sens large.*
- *Le segment* $S_2 = \left[\dfrac{n+1}{2}x_j, \dfrac{n+1}{2}x_{j+1}\right]$ *est de longueur* $\leqslant \dfrac{n+1}{2}\dfrac{\pi}{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ *et sa borne supérieure est* $\dfrac{n+1}{2}x_{j+1} = \dfrac{j+1}{2}\pi = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, *de telle sorte que* $S_2 \subseteq \left[k\pi, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$.
  Comme $\dfrac{n+1}{2}x \in S_2$, *on en déduit que* $\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)$ *est du signe de* $(-1)^k$, *au sens large.*

Par produit, on en déduit que f_n' *est positive sur* $[x_j, x_{j+1}]$.

Le même argument montre que f_n' *est positive sur* $]0, x_1]$. *Comme* $f_n'(0) = n \geqslant 0$, *cela permet de réintégrer le cas* $j = 0$ *à la discussion.*

La fonction f_n' est donc positive (au sens large) sur le segment $[x_j, x_{j+1}]$, et ne s'annule qu'aux bornes de ce segment, d'après la question précédente. La fonction f_n est donc strictement croissante sur ce segment.

On montrerait de même (et on pourra utiliser) que, pour tout entier **impair** $j \in [\![0, n-1]\!]$, f_n décroît strictement sur $[x_j, x_{j+1}]$ et que, si n est impair, elle décroît strictement sur $[x_n, \pi]$.

(c) En esquissant le tableau de variations de f_n (suivant la parité de n), achever la preuve de $\forall x \in]0, \pi[\, , f_n(x) > 0$.

On obtient les tableaux de variations suivants.

Cas 1. *Si n est pair :*

x	0		x_1		x_2		x_3		$\cdots$		x_{n-1}		x_n π
f'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\cdots$	$+$	0	$-$	0
f	0	$\nearrow$	$?$	$\searrow$	$?$	$\nearrow$	$?$	$\searrow$		$\nearrow$	$?$	$\searrow$	0

- *Sur $[0, x_1]$, la fonction croît strictement, et $f(0) = 0$: on a donc $\forall x \in]0, x_1]\, , f(x) > 0$.*
- *Sur $[x_{n-1}, x_n]$, la fonction décroît strictement, et $f(\pi) = 0$: on a $\forall x \in [x_{n-1}, x_n[\, , f(x) > 0$.*
- *Pour tout $j \in [\![2, n-2]\!]$ pair, sur $[x_{j-1}, x_{j+1}]$, la fonction décroît puis croît, donc on a la minoration $\forall x \in [x_{j-1}, x_{j+1}]\, , f(x) \geqslant f(x_j)$.*
  D'après 4b, on en déduit $\forall x \in [x_{j-1}, x_{j+1}]\, , f(x) > 0$.

En rassemblant ces différents résultats, on obtient $\forall x \in]0, \pi[\, , f(x) > 0$.

Cas 2. *Si n est impair :*

x	0		x_1		x_2		x_3		$\cdots$		x_n		π
f'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\cdots$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$?$	$\searrow$	$?$	$\nearrow$	$?$	$\searrow$		$\nearrow$	$?$	$\searrow$	0

- *Sur $[0, x_1]$, la fonction croît strictement, et $f(0) = 0$: on a donc $\forall x \in]0, x_1]\, , f(x) > 0$.*
- *Sur $[x_n, \pi]$, la fonction décroît strictement, et $f(\pi) = 0$: on a $\forall x \in [x_n, \pi[\, , f(x) > 0$.*
- *Pour tout $j \in [\![2, n-1]\!]$ pair, sur $[x_{j-1}, x_{j+1}]$, la fonction décroît puis croît, donc on a la minoration $\forall x \in [x_{j-1}, x_{j+1}]\, , f(x) \geqslant f(x_j)$.*
  D'après 4b, on en déduit $\forall x \in [x_{j-1}, x_{j+1}]\, , f(x) > 0$.

En rassemblant ces différents résultats, on obtient $\forall x \in]0, \pi[\, , f(x) > 0$.

Partie III. Démonstration par sommation.

Dans cette partie, on admet le résultat suivant.

Lemme. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = f(\pi) = 0$.
On suppose qu'il existe $x_0 \in]0, \pi[$ tel que $f(x_0) \leqslant 0$.
Alors il existe $\xi \in]0, \pi[$ tel que $f(\xi) \leqslant 0$ et $f'(\xi) \geqslant 0$.

On va alors montrer (HF) : on fixe un entier $n \geqslant 2$ et

- d'une part, on suppose les assertions $(FJ_1), (FJ_2), \dots, (FJ_{n-1})$;
- d'autre part, par l'absurde et en utilisant le lemme admis, on suppose pouvoir trouver un nombre réel $\xi \in]0, \pi[$ tel que $f_n(\xi) \leqslant 0$ et $f_n'(\xi) \geqslant 0$.

Le but est alors d'arriver à une contradiction à partir de ces hypothèses et des différents calculs de sommes de la partie I.

6. Montrer que $\forall \ell \in [\![2, n]\!], \displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} \frac{\sin(k\,\xi)}{k} < 0$.

Soit $\ell \in [\![2, n]\!]$.
D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\sum_{k=\ell}^{n} \frac{\sin(k\,\xi)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\,\xi)}{k} - \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{\sin(k\,\xi)}{k} \\ &= f_n(\xi) - f_{\ell-1}(\xi).\end{aligned}$$

Par construction de ξ, on a $f_n(\xi) \leqslant 0$.
Par ailleurs, comme $\xi \in]0, \pi[$, l'hypothèse $(FJ_{\ell-1})$ entraîne que $f_{\ell-1}(\xi) > 0$ (notons que l'on a bien $1 \leqslant \ell - 1 \leqslant n - 1$, donc $(FJ_{\ell-1})$ fait partie de l'hypothèse de récurrence).
En faisant la différence, on a maintenant

$$\sum_{k=\ell}^{n} \frac{\sin(k\,\xi)}{k} = f_n(\xi) - f_{\ell-1}(\xi) < 0.$$

7. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k\,\xi) < 0$.

En sommant les différents résultats de la question précédente, on a

$$\sum_{\ell=2}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{\sin(k\,\xi)}{k} < 0.$$

Par ailleurs, $f_n(\xi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\,\xi)}{k} \leqslant 0$.
En sommant, on obtient

$$\begin{aligned}0 &> \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{\sin(k\,\xi)}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sin(k\,\xi),\end{aligned}$$

d'après la question 3, appliquée à la famille $\left(\dfrac{\sin(k\,\xi)}{k}\right)_{k=1}^{n}$.

8. En déduire l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sin\beta \geqslant \sin\alpha > 0 \qquad \text{et} \qquad \cos\beta > \cos\alpha > 0.$$

- ► *La question précédente et la formule de la question 2c montrent que*

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} < 0.$$

Comme $\sin\left(\frac{x}{2}\right) > 0$, *on en déduit*

$$\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) > \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

- ► *De même, l'hypothèse* $f_n'(\xi) \geqslant 0$ *et les questions 2a et 2c montrent de même que*

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \geqslant 0.$$

On en déduit

$$\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) \geqslant \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Comme $\frac{x}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, *on a par ailleurs,* $\cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ *et* $\sin\left(\frac{x}{2}\right) > 0$.
Cela conclut, en posant $\alpha = \frac{x}{2}$ *et* $\beta = \left(n+\frac{1}{2}\right)x$.

9. Obtenir une contradiction (ce qui conclut la démonstration de (HF) et donc de l'inégalité de Fejér-Jackson).

En utilisant la croissance de $x \mapsto x^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *l'inégalité* $\sin\beta \geqslant \sin\alpha > 0$ *donne*

$$\sin^2\beta \geqslant \sin^2\alpha.$$

En utilisant la stricte croissance de $x \mapsto x^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *l'inégalité* $\cos\beta > \cos\alpha > 0$ *donne*

$$\cos^2\beta > \cos^2\alpha.$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient

$$\underbrace{\sin^2\beta + \cos^2\beta}_{=1} > \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{=1},$$

ce qui fournit la contradiction souhaitée, et conclut.