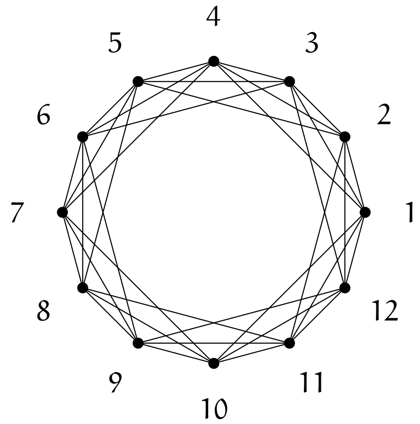
DM 08 : relations (et un tout petit peu de groupes)

Problème A. Deux théorèmes sur les graphes finis.

Dans ce problème, on appelle *graphe (fini)* la donnée d'un ensemble fini V (appelé ensemble de *sommets*) et d'une relation $\mathcal{R}$ réflexive et symétrique. On retrouve ainsi la notion vue en maths expertes en interprétant la relation $v_1 \mathcal{R} v_2$ comme signifiant « $v_1 = v_2$ ou v_1 et v_2 sont reliés par une arête ». Autrement dit, une *arête* de $(V, \mathcal{R})$ est une paire $\{v_1, v_2\}$, où $v_1, v_2 \in V$ sont distincts et reliés par $\mathcal{R}$.

Par exemple, la relation $\mathcal{R}$ définie sur $[\![1, 12]\!]$ par $\forall v_1, v_2 \in [\![1, 12]\!], v_1 \mathcal{R} v_2 \Leftrightarrow |v_1 - v_2| \leqslant 3$ est réflexive et symétrique : c'est donc un graphe (à douze sommets et trente-six arêtes). En voici une représentation :



Partie I. Généralités.

Soit $(V, \mathcal{R})$ un graphe fini.

- Pour tout sommet $v \in V$, on note
  - $N(v) = \{w \in V \mid w \neq v \text{ et } w \mathcal{R} v\}$ le *voisinage* (ou l'ensemble des *voisins*) de v ;
  - $d(v)$ le cardinal de $N(v)$ (appelé le *degré* de v).
- Une *clique* est une partie $C \subseteq V$ telle que $\forall v_1, v_2 \in C, v_1 \mathcal{R} v_2$.
- Une *anticlique* est une partie $A \subseteq V$ telle que $\forall v_1, v_2 \in A, v_1 \mathcal{R} v_2 \Rightarrow v_1 = v_2$.

Dans toute cette partie, on fixe un graphe fini $\Gamma = (V, \mathcal{R})$.

1. Soit C une clique et A une anticlique. Montrer que $A \cap C$ est vide ou est un singleton.
2. **Lemme des poignées de main.** Montrer que le nombre d'arêtes de Γ est $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{v \in V} d(v)$.
3. Soit A une anticlique. Montrer que le nombre d'arêtes de Γ est $\leqslant \displaystyle\sum_{x \in V \setminus A} d(x)$.

Partie II. Théorème de Mantel.

> Un graphe fini est dit *sans triangle* s'il ne contient pas de clique à trois sommets.

Dans toute cette partie, on fixe un graphe $(V, \mathcal{R})$ fini et sans triangle, et on note $n = |V|$.

4. Montrer que, pour tout $v \in V$, le voisinage $N(v)$ est une anticlique.
5. En déduire qu'il existe une anticlique A telle que le nombre d'arêtes de Γ soit $\leqslant |A| \big(n - |A|\big)$.
   Indication. *On pourra considérer une anticlique qui soit la plus grosse possible, en un certain sens.*
6. **Théorème de Mantel.** En déduire que le nombre d'arêtes de Γ est $\leqslant \dfrac{n^2}{4}$.
7. **Cas d'égalité.** Pour fixer les idées, on suppose n pair, et on trouve $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$. On suppose que le graphe $(V, \mathcal{R})$ possède exactement $n^2/4 = m^2$ arêtes.
   (a) Montrer qu'il existe $A \subseteq V$ tel que A et $V \setminus A$ soient deux anticliques de même cardinal.
   (b) Identifier le graphe $(V, \mathcal{R})$ dans ce cas.

Partie III. Théorème de Ramsey bicolore.

Étant donné $r, s \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'un graphe fini $(V, \mathcal{R})$ *vérifie la propriété* $\Pi_{r,s}$ s'il admet une clique à r sommets ou une anticlique à s sommets.

Le but de cette section est de montrer que tout graphe ayant suffisamment de sommets possède cette propriété.

8. **Étape-clef.** Soit $r, s \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on suppose avoir démontré les résultats suivants :
   - Il existe $a \in \mathbb{N}^*$ tel que tout graphe ayant au moins a sommets possède la propriété $\Pi_{r,s+1}$.
   - Il existe $b \in \mathbb{N}^*$ tel que tout graphe ayant au moins b sommets possède la propriété $\Pi_{r+1,s}$.

   Soit $(V, \mathcal{R})$ un graphe tel que $|V| \geqslant a + b$, et $v \in V$.
   (a) On note $M(v) = V \setminus \big(\{v\} \cup N(v)\big)$ (l'ensemble des *non-voisins* de v).
   Montrer que $N(v)$ possède $\geqslant a$ éléments ou que $M(v)$ possède $\geqslant b$ éléments.
   (b) En déduire que V possède la propriété $\Pi_{r+1,s+1}$.
9. **Théorème de Ramsey.** Montrer que, pour tous $r, s \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $\text{Ramsey}(r, s)$ tel que tout graphe ayant au moins $\text{Ramsey}(r, s)$ sommets possède la propriété $\Pi_{r,s}$.

Problème B. Lemme de Zorn (1935).

Ce problème est plus abstrait que le précédent. Il montre un théorème important en mathématiques, mais dont l'emploi est tout à fait évitable dans le cadre des classes préparatoires.

Un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ est dit *inductif* si toute chaîne de E est majorée.
(Remarquons que, l'ensemble vide étant une chaîne, un ensemble ordonné inductif n'est jamais vide : il doit contenir un majorant de $\varnothing$.)

Le but du problème est de montrer le résultat suivant.

Théorème (« lemme de Zorn »). Tout ensemble ordonné inductif possède un élément maximal.

0. Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble **totalement** ordonné inductif.
   Montrer que E admet un élément maximal.

Dans toute la suite, on fixe un ensemble ordonné inductif $(E, \leqslant)$, et l'on cherche à montrer l'existence d'un élément maximal, en construisant une chaîne K adaptée au problème.
Introduisons quelques définitions et notations.

- Un élément $a \in E$ est un *majorant strict* d'une chaîne C si $\forall x \in C, x < a$.
  S'il existe un tel élément, on dit que C est *strictement majorée*.
- On fixe une fois pour toutes un majorant strict μ_C de toute chaîne strictement majorée C.
- Une partie S d'une chaîne C est dite une *section initiale stricte* (en abrégé : SIS) de C si $S \neq C$ et

$$\forall x \in C, \forall y \in S, x \leqslant y \Rightarrow x \in S.$$

1. Soit C une chaîne de E et S une SIS de C. Montrer que S est une chaîne strictement majorée.

Une μ-*chaîne* de E est une chaîne $C \subseteq E$ vérifiant la propriété suivante :
pour toute section initiale stricte S de C, le majorant strict μ_S est le minimum de $C \setminus S$.

2. Montrer que toutes les μ-chaînes non vides de E possèdent un élément en commun.
   Indication. *On ne reculera pas devant la zérologie...*
3. Soit C une μ-chaîne, et $a \in C$. Montrer que l'ensemble $\{x \in C \mid x < a\}$ est une SIS de C, et que

$$a = \mu_{\{x \in C \mid x < a\}}.$$

4. Soit C une μ-chaîne et $T \subseteq C$ une partie non vide.
   (a) Montrer que $M = \{x \in C \mid \forall t \in T, x < t\}$ est une SIS de C.
   (b) En déduire que T admet un minimum.
5. **Comparabilité.**
   (a) Soit C et D deux μ-chaînes. On suppose que $C \setminus D$ n'est pas vide et, grâce à la question précédente, on note c son minimum.
   Montrer que $D = \{x \in C \mid x < c\}$.
   Indication. *La question précédente pourra à nouveau être utile.*
   (b) En déduire qu'étant donné deux μ-chaînes différentes, l'une des deux est une SIS de l'autre.

> Jusqu'à la fin de la démonstration, on note K l'union de toutes les μ-chaînes de E.

6. Montrer que K est une chaîne.
7. Le but de cette question est de montrer que K est même une μ-chaîne. Soit donc S une SIS de K.
   (a) Montrer qu'il existe une μ-chaîne C et un élément $c \in C$ qui soit un majorant strict de S. Dans la suite, on fixe une telle μ-chaîne C et un tel élément $c \in C$.
   (b) Montrer que $S \subseteq C$, et en déduire que S est une SIS de C.
   (c) Conclure.
8. (a) Montrer que pour tout majorant m de K, l'union $K \cup \{m\}$ est encore une μ-chaîne, et en déduire $m \in K$.
   (b) Conclure la démonstration du lemme de Zorn.

Exercice. Sous-groupes maximaux.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

Un sous-groupe M de G est dit *maximal* si :

- M est strict : $M \neq G$;
- les seuls sous-groupes de G contenant M sont M et G.

1. Déterminer les sous-groupes maximaux de $\mathbb{Z}$.
2. Soit G un groupe fini et $M \subseteq G$ un groupe tel que l'indice $[G : M]$ soit un nombre premier. Montrer que M est maximal.
3.$^{+}$ Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $S = \{\sigma \in \mathfrak{S}(n) \mid \sigma(1) = 1\}$ est un sous-groupe maximal de $\mathfrak{S}(n)$.
4. Soit G un groupe **fini** et $H \neq G$ un sous-groupe de G.
   Montrer qu'il existe un sous-groupe maximal M de G tel que $H \subseteq M$.
5. Donner un exemple de groupe n'admettant pas de sous-groupe maximal.