DM 09 : sous-groupe de Frattini

Soit G un groupe (noté multiplicativement).

- On rappelle qu'un sous-groupe M de G, différent de G, est dit *maximal* si tout sous-groupe H de G tel que $M \subseteq H$ doit vérifier $H = M$ ou $H = G$.
  On note $\Phi(G)$, et on appelle *sous-groupe de Frattini* de G, l'intersection de tous les sous-groupes maximaux de G.
  Notamment, on a $\Phi(G) = G$ si (et seulement si) G n'a pas de sous-groupe maximal.
- Un élément $g \in G$ est dit *non générateur* si, quelle que soit la partie A de G, on a l'implication

$$\langle A \cup \{g\} \rangle = G \Rightarrow \langle A \rangle = G.$$

On note (provisoirement) $N(G)$ l'ensemble des éléments non générateurs de G.

Partie I. Généralités.

1. Montrer que $\Phi(G)$ et $N(G)$ sont des sous-groupes de G.
2. (a) Soit M un sous-groupe maximal de G, et $g \in G \setminus M$. Montrer que $\langle M \cup \{g\} \rangle = G$.
   (b) En déduire $N(G) \subseteq \Phi(G)$.
3. On veut montrer l'inclusion réciproque par contraposée. Soit donc $g \in G \setminus N(G)$.
   On peut donc trouver une partie $A \subseteq G$ telle que $\langle A \rangle \neq G$ mais $\langle A \cup \{g\} \rangle = G$.
   (a) En utilisant le lemme de Zorn montré au DM précédent, montrer qu'il existe un sous-groupe maximal M de G tel que $A \subseteq M$ mais $g \notin M$.
   (b) Conclure.

On a montré $N(G) = \Phi(G)$, donc on abandonne dans la suite la notation $N(G)$.

Partie II. Groupe quasicyclique de Prüfer.

Dans toute cette partie, on fixe un nombre premier p et on considère

$$\mathbb{U}_{p^\infty} = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbb{U}_{p^n} \subseteq \mathbb{C}^*.$$

Étant donné un élément $z \in \mathbb{U}_{p^\infty}$, on note $\nu(z) \in \mathbb{N}$ le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $z \in \mathbb{U}_{p^n}$.

4. Montrer que $\mathbb{U}_{p^\infty}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.
5. Soit $z \in \mathbb{U}_{p^\infty}$.
   (a) Montrer que l'ordre de z est fini, et l'exprimer en fonction de $\nu(z)$.
   (b) Quel est le sous-groupe engendré $\langle z \rangle$?
6. Soit $A \subseteq \mathbb{U}_{p^\infty}$.
   Montrer que $\langle A \rangle = \mathbb{U}_{p^\infty}$ si et seulement si la fonction restreinte $\nu_{|A}$ n'est pas majorée.
7. En déduire que $\Phi(\mathbb{U}_{p^\infty}) = \mathbb{U}_{p^\infty}$.

Partie III. Sous-groupe de Frattini d'un groupe monogène.

8. (a) Soit $n, m \in \mathbb{N}$. À quelle condition a-t-on $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$?
   (b) En déduire les sous-groupes maximaux de $\mathbb{Z}$, puis $\Phi(\mathbb{Z})$.

9. Soit $n \geqslant 2$ un entier et $\pi : \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ k \mapsto [k]_n \end{cases}$ la surjection canonique.
   (a) Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
   Montrer qu'il existe un sous-groupe K de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $H = \pi^{-1}[K]$ si et seulement si $n\mathbb{Z} \subseteq H$.
   (b) Soit K un sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   Montrer que K est un sous-groupe maximal si et seulement si $\pi^{-1}[K]$ est un sous-groupe maximal de $\mathbb{Z}$.
   (c) Déduire de ce qui précède $\pi^{-1}[\Phi(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})]$. À quelle condition a-t-on $\Phi(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{[0]_n\}$?

Partie IV. Exemples diédraux.

On reprend les notations du DS 4 !

10. **Groupe diédral infini D_∞.**
    (a) Soit p un nombre premier.
        i. Montrer que les sous-groupes $\langle t^p, r\rangle$ et $\langle t^p, s\rangle$ de D_∞ sont maximaux.
        ii. Montrer $\langle t^p, r\rangle \cap \langle t^p, s\rangle = \langle t^p\rangle$.
    (b) Montrer que $\Phi(D_\infty) = \{\mathrm{id}\}$.

11.$^+$ Soit $n \geqslant 1$. En vous inspirant de la partie précédente et du cas de D_∞, déterminer $\Phi(D_{2n})$.