DM 13 : deux théorèmes généraux sur les suites récurrentes

Dans l'exercice et le problème, étant donné une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ d'un ensemble dans lui-même, on pourra noter f^n la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$, avec n occurrences de f (si bien que $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$).

Comme le montre une récurrence immédiate, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ se réécrit alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^n(u_0))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice. Théorème du point fixe de Banach (1922).

Dans cet exercice, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une *contraction*, c'est-à-dire que l'on peut trouver une constante $k \in [0, 1[$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{C}, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$.

On considère alors une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Le théorème du point fixe de Banach affirme :

- que f possède un unique point fixe ℓ ;
- que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

1. Montrer que f possède au plus un point fixe.
2. (a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| \leqslant k^n\,|u_1 - u_0|$.

   (b) En déduire $\forall p, q \in \mathbb{N}, |u_{p+q} - u_p| \leqslant \dfrac{k^p}{1-k}\,|u_1 - u_0|$.
3. Montrer qu'il existe une extractrice φ telle que la suite $(u_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ converge.
   On notera ℓ sa limite.
4. En réutilisant la question 2b, montrer que l'on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
5. Conclure.

Remarque. Le « vrai » théorème du point fixe de Banach s'applique dans un cadre beaucoup plus général que celui des suites complexes.

Problème. Théorème de Kohlberg-Neyman (1981).

Dans cet exercice, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une *semi-contraction*, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

On veut montrer l'existence de $\nu \in \mathbb{C}$ tel que, toute suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \nu.$$

1. Montrer le résultat dans les cas où f est une translation, et dans ceux où f est une rotation.
2. On suppose avoir trouvé $\nu \in \mathbb{C}$ tel que $\dfrac{f^n(0)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \nu$. Conclure la démonstration du théorème.
3. **Lemme de Fekete.** On considère une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ *sous-additive*, c'est-à-dire telle que $\forall p, q \in \mathbb{N}, d_{p+q} \leqslant d_p + d_q$.
   (a) Montrer que l'ensemble $\left\{ \dfrac{d_n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ possède une borne inférieure $\ell \in \mathbb{R}_+$.
   (b) Soit $T \in \mathbb{N}^*$. On note $M = \max(d_0, \dots, d_{T-1})$. Montrer $\forall n \geqslant T, \dfrac{d_n}{n} \leqslant \dfrac{d_T}{T} + \dfrac{M}{n}$.
   (c) Déduire de ce qui précède que $\dfrac{d_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
4. En utilisant le lemme de Fekete, montrer l'existence de $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $\dfrac{|f^n(0)|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
5. On suppose $\ell = 0$. Montrer que $\left(\dfrac{f^n(0)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Dans la suite des questions, on suppose toujours $\ell > 0$.

6. **Un lemme d'existence de records.** Soit $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N : \forall k \leqslant n, s_k \leqslant s_n.$$

7. (a) Soit $\lambda \in]0, \ell[$. En appliquant la question précédente à la suite $(d_n - \lambda n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $\forall j \in [\![0, n]\!], d_n \geqslant d_{n-j} + \lambda j$.
   (b) Soit $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, \ell[$ convergeant vers 0. Montrer l'existence d'une extractrice α telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in [\![0, \alpha(k)]\!], d_{\alpha(k)} \geqslant d_{\alpha(k)-j} + (\ell - \varepsilon_k)j.$$

8. (a) Soit $\omega \in \mathbb{U}$. Montrer $\forall z \in \mathbb{C}, \text{Ré}\,(\omega\, z) \leqslant |z|$.
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer l'existence de $\omega \in \mathbb{U}$ tel que $\text{Ré}\,(\omega\, z) = -|z|$.

Dans la suite, on fixe une suite $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'élements de $\mathbb{U}$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Ré}\left(\omega_k\, f^{\alpha(k)}(0)\right) = -d_{\alpha(k)}$.

9. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $j \geqslant \alpha(k)$.
   (a) Montrer $\text{Ré}\left(\omega_k\, f^j(0)\right) \leqslant \left|f^j(0) - f^{\alpha(k)}(0)\right| - d_{\alpha(k)}$.
   (b) En déduire $\text{Ré}\left(\omega_k\, f^j(0)\right) \leqslant -(\ell - \varepsilon_k)j$.
10. Montrer l'existence d'un complexe $\omega_\infty \in \mathbb{U}$ tel que $\forall j \in \mathbb{N}, \text{Ré}\left(\omega_\infty\, f^j(0)\right) \leqslant -\ell\, j$.
11. Montrer que $\left(\dfrac{f^j(0)}{j}\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$ possède une unique valeur d'adhérence, et en déduire qu'elle converge.

Remarque. La preuve donnée ici est due à Anders Karlsson (2001).