DM 16 : deux développements asymptotiques [corrigé]

Exercice 1. Développement asymptotique d'une distance.

1. **Deux DL pour s'échauffer.** Déterminer un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ (ou plutôt de son prolongement continu) et un $\mathrm{DL}_6(0)$ de $x \mapsto \ln(\cos x)$.

   ▸ *On a*

$$\begin{aligned}
\ln\frac{\sin x}{x} &= \ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)\\
&= \left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2+o(x^4)\\
&\qquad\qquad \textit{car}\ \begin{cases}\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)\\ u=-\dfrac{x^2}{6}+o(x^2)\xrightarrow[x\to 0]{}0\\ o(u^2)=o(x^4)\end{cases}\\
&= -\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4).
\end{aligned}$$

   ▸ *On a*

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\right)\\
&= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^3+o(x^6)\\
&\qquad\qquad \textit{car}\ \begin{cases}\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{3}+o(u^3)\\ u=-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\xrightarrow[x\to 0]{}0\\ o(u^3)=o(x^6)\end{cases}\\
&= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6).
\end{aligned}$$

2. **Distance (au carré) à un graphe.** Soit[1] $f \in C^1(\mathbb{R})$. On définit $\Delta(f)=\inf\left\{x^2+f(x)^2 \,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$.

   (a) Montrer que $\Delta(f)$ est bien défini, et montrer l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n^2+f(x_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Delta(f)$.

   Soit $E=\left\{x^2+f(x)^2 \,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$. *Cet ensemble est clairement non vide (il contient* $f(0)^2$*) et minoré (par* 0*), donc il admet une borne inférieure, ce qui justifie l'existence de* $\Delta(f)$.
   Par ailleurs, $\Delta(f)=\inf E\in\overline{E}$, *et la caractérisation séquentielle de l'adhérence montre l'existence de* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$ *telle que* $d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Delta(f)$. *Vu la définition de* E, *cela se traduit immédiatement en l'existence de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de l'énoncé.*

1. Erreur dans l'énoncé, qui ne supposait que f continue. Cela est suffisant pour les premières questions mais, évidemment, pas pour l'égalité $f(a)\,f'(a)=-a$.

(b) En déduire l'existence de $a \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta(f) = a^2 + f(a)^2$.

Puisque $x_n^2+f(x_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Delta(f)$, *la suite* $(x_n^2+f(x_n)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée (par* M, *disons). On en déduit que* $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée (par* M*) puis que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée (à valeurs dans* $\left[-\sqrt{M}, \sqrt{M}\right]$*).*
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut trouver une extractrice φ *et* $a \in \mathbb{R}$ *telle que* $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
Par continuité de f *et par opérations,* $x_n^2 + f(x_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} a^2 + f(a)^2$.
Par unicité de la limite, on en déduit $\Delta(f) = a^2 + f(a)^2$.

(c) Montrer que $f(a)\, f'(a) = -a$.

La fonction $g : x \mapsto x^2 + f(x)^2$ *est dérivable par opérations, et elle admet un minimum en* a *(qui est évidemment intérieur, puisque le domaine de la fonction est l'intervalle* $\mathbb{R}$*, ouvert).*
On en déduit $g'(a) = 0$, *c'est-à-dire* $2a + 2\, f'(a)\, f(a) = 0$, *ce qui conclut.*

> Dans toute la suite du problème, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n : x \mapsto \cos^n x$, définie sur $\mathbb{R}$. On note alors $\delta_n = \Delta(f_n)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer l'existence de $a_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\delta_n = a_n^2 + \cos^{2n}(a_n)$.

D'après 2b, on peut trouver $a_n \in \mathbb{R}$ *tel que* $a_n^2 + \cos^{2n}(a_n) = \delta_n$.

- *Comme* $\delta_n \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, *on a* $a_n^2 \leqslant a_n^2 + \cos^{2n}(a_n) = \delta_n \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, *d'où l'on tire* $|a_n| \leqslant \frac{\pi}{2}$.
- *Par parité de* f_n, *quitte à remplacer* a_n *par son opposé, on peut donc supposer* $a_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Montrer $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $\eta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ *tel que* $\eta^2 \leqslant \varepsilon$. *Remarquons déjà que* $\cos(\eta) \in [0, 1[$, *donc que* $\cos^{2n}(\eta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On a alors $a_n^2 \leqslant a_n^2 + \cos^{2n}(a_n) = \delta_n \leqslant \eta^2 + \cos^{2n}(\eta) \leqslant \varepsilon + \cos^{2n}(\eta)$.
Comme $\cos^{2n}(\eta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *on a* $0 \leqslant \cos^{2n}(\eta) \leqslant \varepsilon$ *à partir d'un certain rang, donc* $a_n^2 \leqslant 2\varepsilon$ *à partir d'un certain rang, ce qui montre* $a_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On en déduit $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

4. (a) Montrer que pour n suffisamment grand,[2] $\ln n = -\ln\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right) - (2n-1)\ln(\cos a_n)$.

D'après la question 2c, on a $-a_n = -\cos^n(a_n)\, n \sin(a_n) \cos^{n-1}(a_n)$.
La démonstration de la question précédente donnait $\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *En particulier, pour* n *suffisamment grand, on a* $\delta_n < 0^2 + \cos^{2n}(0) = 1$ *et donc* $a_n \neq 0$. *Pour de tels* n, *la relation précédente se réécrit* $\frac{1}{n} = \frac{\sin(a_n)}{a_n} \cos^{2n-1}(a_n)$, *et l'on obtient la relation de l'énoncé en passant au logarithme.*

---

2. L'énonce demandait de montrer la relation pour tout $n \geqslant 1$, ce qui inepte si $n = 1$, puisque $a_1 = 0$. Cet énoncé affaibli suffit pour la suite : on n'utilise la relation de cette question que de façon asymptotique.

(b) En déduire $a_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

En utilisant les DL calculés à l'échauffement et car $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, la relation de la question précédente donne*

$$\begin{aligned}\ln n &= \left(\frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2)\right) + (2n-1)\left(\frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)\right)\\ &= n\,a_n^2 + o(n\,a_n^2),\end{aligned}$$

donc $\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,a_n^2$*, puis* $a_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$ *d'après les propriétés multiplicatives de l'équivalent.*

5. (a) Montrer $\ln\left(\dfrac{\sin a_n}{a_n}\right) = o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$ et $\ln(\cos a_n) = o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$.

On a $a_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$*, donc* $a_n^2 = o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$.

On en déduit $\ln\left(\dfrac{\sin a_n}{a_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a_n^2}{6} = o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$ *et* $\ln\cos a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a_n^2}{2} = o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$.

(b) En reprenant la relation obtenue à la question 4a et en effectuant un développement asymptotique à la précision $o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$, montrer $a_n^2 = \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln^2 n}{6n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

Indication. On pourra introduire la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n^2 = \dfrac{\ln n}{n} + b_n$.

On a

$$\begin{aligned}\ln n &= -\ln\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right) - 2n\ln\cos a_n + \ln\cos a_n\\ &= -2n\,\ln(\cos a_n) + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\\ &= n\left(a_n^2 + \frac{a_n^4}{6} + o(a_n^4)\right) + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\\ &= n\,a_n^2 + n\frac{a_n^4}{6} + o(n\,a_n^4) + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right).\end{aligned}$$

On remarque que $n\,a_n^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln^2 n}{n}$*, donc* $n\,\dfrac{a_n^4}{6} + o(n\,a_n^4) = \dfrac{\ln^2 n}{6n} + o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$*, ce qui donne*

$$\ln n = n\,a_n^2 + \frac{\ln^2 n}{6n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right).$$

En introduisant la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_n^2 - \dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$*, il vient*

$$\ln n = \ln n + n\,b_n + \frac{\ln^2 n}{6n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right),$$

d'où l'on tire

$$n\,b_n = -\frac{\ln^2 n}{6n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$$

$$\textit{donc} \qquad b_n = -\frac{\ln^2 n}{6n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right).$$

On a ainsi montré

$$a_n^2 = \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{6n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right).$$

(c) En déduire un développement asymptotique de $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à la précision $o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

On a $\cos^{2n} a_n = \exp(2n\ \ln\cos a_n)$. *Décomposons le calcul :*

- *on a*

$$\begin{aligned}
\ln\cos a_n &= -\frac{a_n^2}{2} - \frac{a_n^2}{12} + o(a_n^4)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{6n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^2 + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\\
&= -\frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\ ;
\end{aligned}$$

- *on en déduit* $2n\ \ln\cos a_n = -\ln n + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$ *;*
- *enfin, on a*

$$\begin{aligned}
\cos^{2n} a_n &= \exp(2n\ \ln\cos a_n)\\
&= \exp\left(-\ln n + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\exp\left(o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(1 + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\delta_n = a_n^2 + \cos^{2n} a_n = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln^2 n}{6n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right).$$

Exercice 2. Un DL, deux applications.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} X^k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que $\sqrt{1-4x} = 1 - 2x\,P_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$.

   On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+u} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{1/2}{k} u^k + o(u^{n+1}) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2}\, \frac{\overbrace{(-1/2)(-3/2)\cdots(-k+3/2)}^{k-1 \textit{ facteurs}}}{k!}\, u^k + o(u^{n+1}) \\
\textit{donc} \qquad \sqrt{1-4x} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2}\, \frac{\overbrace{(-1/2)(-3/2)\cdots(-k+3/2)}^{k-1 \textit{ facteurs}}}{k!} (-1)^k\, 4^k\, x^k + o(x^{n+1}) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-3)}{k!}\, 2^k\, x^k + o(x^{n+1}) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{(k+1)!}\, 2^{k+1}\, x^{k+1} + o(x^{n+1}) \\
&= 1 - 2x \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{(k+1)!\,k!} x^k + o(x^{n+1}) \\
&= 1 - 2x \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} x^k + o(x^{n+1}) \\
&= 1 - 2x\,P_n(x) + o(x^{n+1}),
\end{aligned}$$

   où l'on a utilisé le calcul classique

$$1\times 3\times\cdots\times(2k-1) = \frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(2k-1)\times(2k)}{2\times 4\times\cdots\times(2k)} = \frac{(2k)!}{2^k\,k!}.$$

   (b) En déduire l'existence de $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1-4X = (1-2X\,P_n(X))^2 + X^{n+2}\,Q_n(X)$.

   La question précédente montre (en notant qu'au voisinage de 0, $1-4x$ *est bien le carré de* $\sqrt{1-4x}$*) que*

$$1-4x = \Big(1 - 2x\,P(x) + o(x^{n+1})\Big)^2 = (1-2x\,P_n(x))^2 + o(x^{n+1}).$$

   Par ailleurs, par division euclidienne, on peut trouver $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ *et* $R_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} r_k\,X^k \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ *tels que*

$$(1-4X) - (1-2X\,P_n(X))^2 = X^{n+2}Q_n(X) + R_n(X).$$

   En confrontant les deux remarques précédentes, on obtient $R_n(x) = o(x^{n+1})$*. Mais, naturellement, on a également* $R_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} r_k\,x^k = \sum_{k=0}^{n+1} r_k\,x^k + o(x^{n+1})$*. Par unicité du développement limité, on en déduit que* $r_0 = r_1 = \cdots = r_{n+1} = 0$*, et donc* $R = 0$*.*

Ainsi, on a bien montré

$$(1-4X)-(1-2X\,P_n(X))^2 = X^{n+2}\,Q_n(X),$$

ce qui conclut.

2. **Racines carrées des matrices unipotentes.** Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $N^n = 0$. Utiliser ce qui précède pour montrer l'existence de $R \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = I_n + N$.

   On a vu que les règles d'addition et de multiplication des polynômes permettent de faire des calculs sur des « polynômes de matrices » tels que $P(N)\,Q(N) = (PQ)(N)$.

   Plus précisément (et plus formellement), si A *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre, que* $a \in A$ *et que* $P = \sum_{k=0}^{n} p_k\,X^k \in \mathbb{R}[X]$, *la formule* $P(a) = \sum_{k=0}^{n} p_k\,a^k$ *définit une application d'évaluation* $\text{év}_a : \mathbb{R}[X] \to A$, *dont on vérifie sans difficulté qu'il s'agit d'un morphisme de* $\mathbb{R}$*-algèbres, c'est-à-dire d'un morphisme d'anneaux* $\mathbb{R}$*-linéaire. Notons que, dans notre cas,* $\text{év}_N(1) = 1_{M_n(\mathbb{R})} = I_n$.
   On peut ainsi « évaluer en $-N/4$ *» la relation polynomiale de la question précédente, pour obtenir*

$$I_n + N = (I_n - 4(-N/4)) = (I_n + N/4\,P_n(N))^2 + (-1)^n \underbrace{N^{n+2}}_{=0}/4^{n+2}\,Q_n(N) = R^2,$$

   où l'on a défini $R = I_n + \dfrac{N}{4}P_n(N) \in M_n(\mathbb{R})$.

> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-*ième nombre de Catalan* $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

3. **Relation de récurrence.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $X\,P_n(X)^2 = P_n(X) - 1 - \frac{1}{4}X^{n+1}\,Q_n(X)$.

   La relation obtenue à la question 1b donne

$$1-4X = 1-4X\,P_n(X) + 4X^2\,P_n(X)^2 + X^{n+2}\,Q_n(X),$$

   d'où l'on tire $4X\left(X\,P_n(X)^2 - P_n(X) + 1 + \dfrac{X^{n+1}}{4}\,Q_n(X)\right) = 0$, *puis la relation demandée en utilisant l'intégrité de* $\mathbb{R}[X]$.

   (b) En déduire la formule $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k\,C_{n-1-k}$.

   En appliquant la fonction coeff_n *de part et d'autre de la relation précédente, on obtient*
   - *d'une part,*

$$\begin{aligned}\text{coeff}_n(X\,P_n(X)^2) &= \text{coeff}_{n-1}(P_n(X)^2)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \text{coeff}_k(P_n)\ \text{coeff}_{n-1-k}(P_n)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k\,C_{n-1-k}\ ;\end{aligned}$$

   - *d'autre part,*

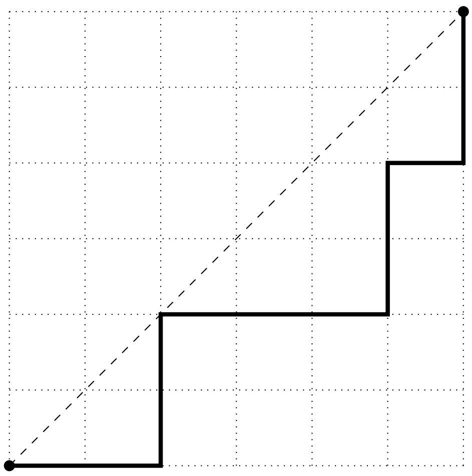
$$\text{coeff}_n\left(P_n - 1 - \frac{1}{4}X^{n+1}Q\right) = \text{coeff}_n(P_n) = C_n.$$

   Cela donne la relation de récurrence demandée.

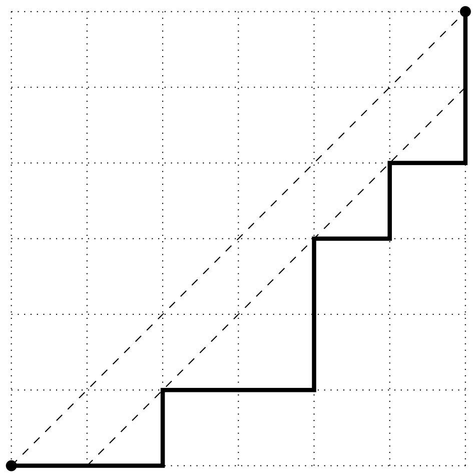
À un décalage d'indices près, on a donc démontré $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k\, C_{n-k}$.

4. **Interprétation combinatoire.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
   - p_n le nombre de chemins constitués de pas d'une unité vers le haut ou vers la droite, allant de $(0,0)$ à (n,n) et restant en-dessous de la première bissectrice du plan ;
   - q_n le nombre de chemins constitués de pas d'une unité vers le haut ou vers la droite, allant de $(0,0)$ à (n,n) et restant en-dessous de la droite d'équation $y = x - 1$ (à l'exception du départ et de l'arrivée).

   On définit également $p_0 = 1$.

   un chemin, parmi $p_6 = 132$ possibilités

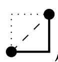
   

   un chemin, parmi $q_6 = 42$ possibilités

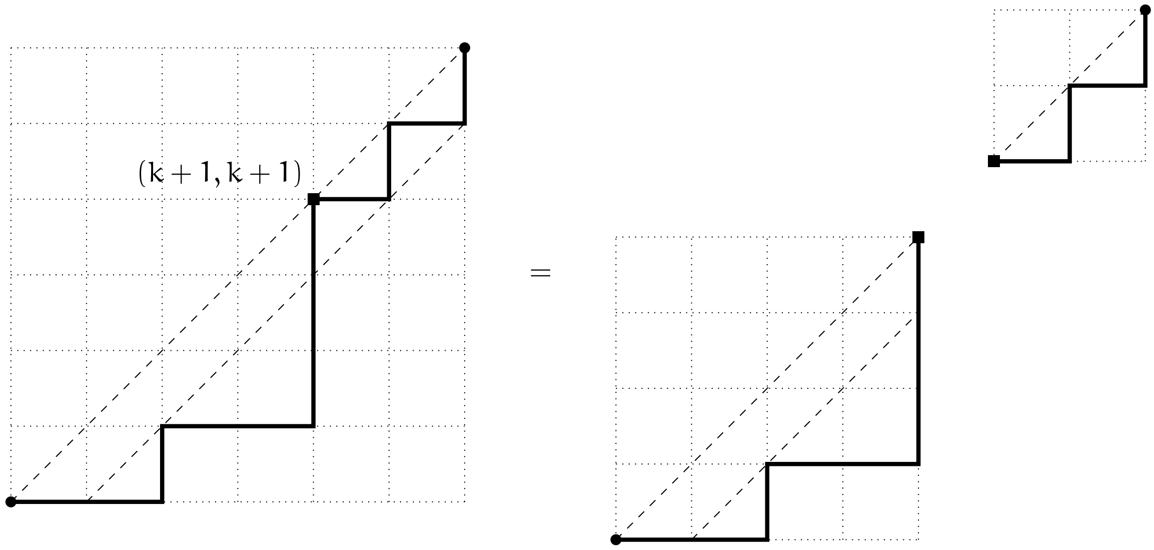
   (a) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}^*, q_k = p_{k-1}$.

   Dans la suite, on dira « chemin » pour « chemin constitué de pas d'une unité vers le haut ou vers la droite ».
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   On voit directement que l'un des chemins comptés par q_k *doit nécessairement commencer par un pas vers la droite et finir par un pas vers le haut.*
   Entre ces deux figures imposées, le chemin va de $(1,0)$ *à* $(k, k-1)$ *tout en restant en-dessous de la droite reliant ces deux points. À un décalage près, ce sont exactement les chemins allant de* $(0,0)$ *à* $(k-1, k-1)$ *restant en-dessous de la droite reliant ces deux points, c'est-à-dire la première bissectrice du plan.*
   En particulier, il y a exactement de chemins allant de $(0,0)$ *à* (k,k) *et restant en-dessous de la droite d'équation* $y = x - 1$ *(à l'exception du départ et de l'arrivée) que de chemins allant de* $(0,0)$ *à* $(k-1,k-1)$ *et restant en-dessous de la première bissectrice du plan.*
   Cela montre $q_k = p_{k-1}$.

   (b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = C_n$.

   Il suffit de montrer que les nombres $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *vérifient la même relation de récurrence que les nombres* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Puisque* $p_1 = C_1 = 1$, *comptant l'unique chemin* , *une récurrence immédiate montrera* $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = C_n$.
   Soit donc $n \in \mathbb{N}$. *Tout chemin joignant* $(0,0)$ *à* $(n+1, n+1)$ *et restant sous la première bissectrice va toucher, après l'origine, la première bissectrice du plan en un premier point, que l'on va noter* $(k+1, k+1)$, *pour un certain* $k \in [\![0, n]\!]$. *Ces chemins seront dits de* type k. *Nous allons montrer*

qu'il existe exactement $p_k\, p_{n-k}$ *chemins de type* k*, ce qui conclura. (Notons que le type est bien défini : un même chemin ne peut pas être de type* k *et de type* $\ell \neq k$*).*



$n = 5$ *: un chemin* $(0,0) \rightsquigarrow (n+1, n+1)$ *de type* $k = 3$

Il suffit alors de constater qu'un chemin de type k *est obtenu en « concaténant » deux chemins :*

- *un chemin joignant* $(0,0)$ *à* $(k+1, k+1)$ *et restant en-dessous de la droite d'équation* $y = x - 1$ *(à l'exception du départ et de l'arrivée) ;*
- *un chemin joignant* $(k+1, k+1)$ *à* $(n+1, n+1)$ *et restant en-dessous de la première bissectrice du plan : à un décalage près, cela revient à considérer un chemin joignant* $(0,0)$ *à* $(n-k, n-k)$ *et restant en-dessous de la première bissectrice du plan.*

Par ailleurs, il est clair que la concaténation de ces deux sortes de chemins fournissent bel et bien l'un des chemins comptés par p_{n+1}*, et on constate que le calcul donne également le bon résultat si* $k = n$*, grâce à la convention* $p_0 = 1$*.*

In fine*, on obtient*

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} q_{k+1}\, p_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} p_k\, p_{n-k}.$$