DM 16 : deux développements asymptotiques

Exercice 1. Développement asymptotique d'une distance.

Cet exercice est inspiré d'un exercice posé à l'oral de l'X. Il établit un développement asymptotique pour une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie géométriquement.

1. **Deux DL pour s'échauffer.** Déterminer un $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ (ou plutôt de son prolongement continu) et un $DL_6(0)$ de $x \mapsto \ln(\cos x)$.

Remarque. Ces DL seront utiles dans la suite, mais pas forcément à cette précision.

2. **Distance (au carré) à un graphe.** Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On définit $\Delta(f) = \inf\left\{x^2 + f(x)^2 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$.
   (a) Montrer que $\Delta(f)$ est bien défini, et montrer l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n^2 + f(x_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Delta(f)$.
   (b) En déduire l'existence de $a \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta(f) = a^2 + f(a)^2$.
   (c) Montrer que $f(a)\,f'(a) = -a$.

Dans toute la suite du problème, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n : x \mapsto \cos^n x$, définie sur $\mathbb{R}$. On note alors $\delta_n = \Delta(f_n)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer l'existence de $a_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\delta_n = a_n^2 + \cos^{2n}(a_n)$.
   (b) Montrer $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. (a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln n = -\ln\left(\dfrac{\sin a_n}{a_n}\right) - (2n-1)\ln(\cos a_n)$.
   (b) En déduire $a_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.
5. (a) Montrer $\ln\left(\dfrac{\sin a_n}{a_n}\right) = o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$ et $\ln(\cos a_n) = o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$.
   (b) En reprenant la relation obtenue à la question 4a et en effectuant un développement asymptotique à la précision $o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n}\right)$, montrer $a_n^2 = \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln^2 n}{6n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

   Indication. On pourra introduire la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n^2 = \dfrac{\ln n}{n} + b_n$.
   (c) En déduire un développement asymptotique de $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à la précision $o\left(\dfrac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

Exercice 2. Un DL, deux applications [1].

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} X^k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\sqrt{1-4x} = 1 - 2x\,P_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$.
   (b) En déduire l'existence de $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 - 4X = (1 - 2X\,P_n(X))^2 + X^{n+2}\,Q_n(X)$.
2. **Racines carrées des matrices unipotentes.** Soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $N^n = 0$. Utiliser ce qui précède pour montrer l'existence de $R \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = I_n + N$.

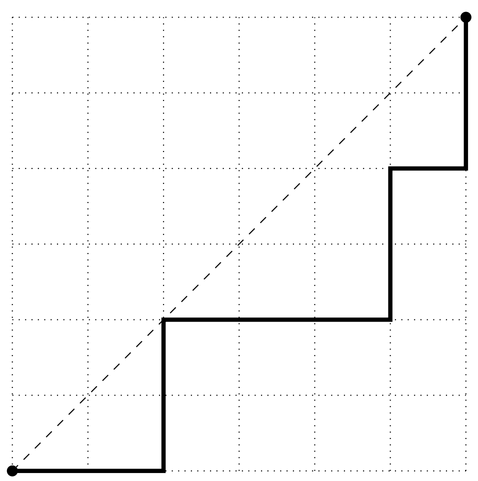
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-*ième nombre de Catalan* $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

3. **Relation de récurrence.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $X\,P_n(X)^2 = P_n(X) - 1 - \frac{1}{4}X^{n+1}\,Q_n(X)$.
   (b) En déduire la formule $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} C_k\,C_{n-1-k}$.

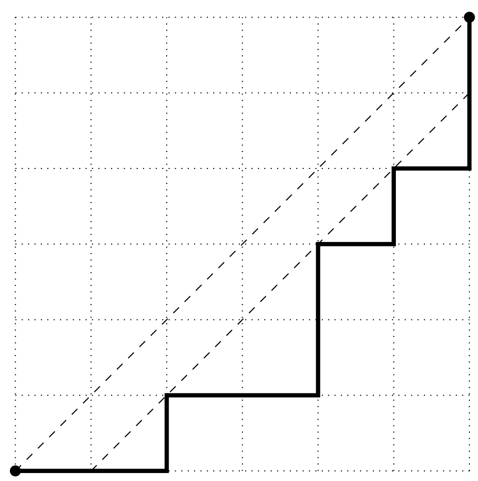
À un décalage d'indices près, on a donc démontré $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k\,C_{n-k}$.

4. **Interprétation combinatoire.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
   - p_n le nombre de chemins constitués de pas d'une unité vers le haut ou vers la droite, allant de $(0,0)$ à (n,n) et restant en-dessous de la première bissectrice du plan ;
   - q_n le nombre de chemins constitués de pas d'une unité vers le haut ou vers la droite, allant de $(0,0)$ à (n,n) et restant en dessous de la droite d'équation $y = x - 1$ (à l'exception du départ et de l'arrivée).

   On définit également $p_0 = 1$.



un chemin, parmi $p_6 = 132$ possibilités



un chemin, parmi $q_6 = 42$ possibilités

   (a) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}^*, q_k = p_{k-1}$.
   (b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = C_n$.

1. Merci à Jean Nougayrède, professeur d'une autre MPSI 3, pour le sujet !