DM 17 : liberté !

Partie I. Un lemme général.

> Dans cette partie, on dégage une condition suffisante de liberté.
> On fixe un corps K, un K-espace vectoriel E et une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs **non nuls** de E.
>
> Le but est de montrer le résultat suivant :
>
> **Lemme.** On suppose qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E)$ et une famille de scalaires **distincts** $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\forall i \in I, T(x_i) = \lambda_i\, x_i$.
> Alors $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

1. **Une relation de liaison essentiellement unique.** On suppose ici la famille $(x_i)_{i\in I}$ liée.
   (a) **Une sous-famille à peine liée.** Justifier qu'il existe une partie finie $J \subseteq I$ et une famille de scalaires $(\alpha_j)_{j\in J}$ telles que
      (i) la famille $(\alpha_j)_{j\in J}$ n'est pas nulle, et $\displaystyle\sum_{j\in J} \alpha_j\, x_j = 0_E$;
      (ii) toute sous-famille $(x_j)_{j\in J'}$, où J' est une partie stricte de J, est libre.
   (b) Justifier que $|J| \geqslant 2$.
   (c) Montrer que la relation de liaison obtenue ci-dessus est unique à une constante multiplicative près, c'est-à-dire que si une famille de scalaires $(\beta_j)_{j\in J}$ vérifie $\displaystyle\sum_{j\in J} \beta_j\, x_j = 0_E$, alors il existe $\kappa \in K$ tel que $\forall j \in J, \beta_j = \kappa\, \alpha_j$.
2. **Démonstration du lemme.** On suppose maintenant qu'il existe un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ et une famille de scalaires **distincts** $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\forall i \in I, T(x_i) = \lambda_i\, x_i$.
   (a) Montrer que si $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ vérifie $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i\, x_i = 0_E$, alors la famille $(\alpha_i\, \lambda_i)_{i\in I}$ est encore presque nulle et vérifie $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i\, \lambda_i\, x_i = 0_E$.
   (b) Conclure.

Partie II. Des applications.

3. (a) Étant donné $f \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$, on définit une nouvelle fonction $D(f) : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(2x). \end{cases}$
   Montrer que D est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^0(\mathbb{R}_+^*)$.
   (b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.
   En utilisant la partie précédente, montrer que $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.
4. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit $e_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$, qui est un élément de $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
   Montrer que la famille $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{C}}$ est libre.
5. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_-$, on définit $h_\alpha : x \mapsto \cos(\alpha x)$. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $h_\beta : x \mapsto \sin(\beta x)$.
   (a) En utilisant la première partie, montrer que les familles $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_-}$ et $(h_\beta)_{\beta\in\mathbb{R}_+^*}$ sont libres.
   (b) Montrer que $\mathrm{Vect}(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_-}$ et $\mathrm{Vect}(h_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*}$ sont en somme directe.
   (c) En déduire que $(h_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}}$ est libre.

Partie III. Liberté des échelles de comparaison.

6. **Un exemple.** Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $f_{\alpha,\beta} : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha \,(\ln x)^\beta \end{cases}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère des indices $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, supposés deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $k \in [\![1, r]\!]$ tel que
   $$\forall j \in [\![1, r]\!] \setminus \{k\}, f_{\alpha_j,\beta_j}(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(f_{\alpha_k,\beta_k}(x)\right).$$
   (b) En déduire que la famille $(f_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*}$ est libre.
   Indication. On pourra par exemple s'inspirer de la démonstration de la liberté des familles échelonnées de polynômes.
7. **Une généralisation.** Soit $(T, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné. On considère une famille $(f_\tau)_{\tau\in T}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall \sigma, \tau \in T, \sigma \prec \tau \Rightarrow f_\sigma(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\big(f_\tau(x)\big)$.
   Montrer que $(f_\tau)_{\tau\in T}$ est libre.
8. $^{+}$ Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Utiliser la question précédente pour construire une famille libre de fonctions dans l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R}_+^*)$ qui soit indexée par $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^d$, muni de l'ordre lexicographique.

Partie IV. Liberté des caractères.

> Soit M un monoïde noté multiplicativement et K un corps. On considère une famille $(\chi_i)_{i\in I}$ de *caractères* de M, c'est-à-dire de morphismes de monoïdes de M vers le groupe multiplicatif K^*.
> On suppose que les caractères formant la famille $(\chi_i)_{i\in I}$ sont deux à deux distincts.
> On va montrer que la famille $(\chi_i)_{i\in I}$, que l'on peut considérer dans le K-espace vectoriel K^M de toutes les applications $M \to K$, est libre.

9. Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ telle que $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i \chi_i = 0_{K^M}$.
   Montrer que, pour tout $g \in M$, on a $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i \chi_i(g) \chi_i = 0_{K^M}$.
10. En utilisant la première partie, montrer que $(\chi_i)_{i\in I}$ est libre.
11. **Une vieille application.** Utiliser ce résultat pour proposer une nouvelle démonstration d'une question précédente.
12. **Une nouvelle application.** Soit $z_1, \ldots, z_n \in K$ des scalaires non nuls distincts.
    Montrer qu'il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que $z_1^e + \cdots + z_n^e \neq 0$.

Partie V. Deux derniers résultats.

13. Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ est un ensemble minoré non vide.
    Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note f_t la fonction $x \mapsto f(x - t)$.
    Montrer que $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est libre.
14. $^{++}$ **Un exercice d'oral (X).** On continue à considérer, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $e_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ définie par $e_\alpha : t \mapsto e^{\alpha t}$. On note $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Ré}\, z \geqslant 0\}$.
    Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ non nulle telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
    Montrer que la famille obtenue en ajoutant f à $(e_\alpha)_{\alpha\in P}$ est libre.