DM 18 : décomposition de Fitting et théorème de Krull-Schmidt [corrigé]

- Dans tout le problème, on fixe un corps des scalaires $\mathbb{K}$.
- On fixe un espace vectoriel de dimension finie E et, dans les deux premières parties, un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.
- Étant donné deux ensembles A et B, on note $A \subsetneq B$ si $A \subseteq B$ et $A \neq B$.

Partie I. Noyaux et images itérés.

1. Montrer que la suite $(\ker u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (dite *suite des noyaux itérés*) est croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que $\forall k \in \mathbb{N}, \ker u^k \subseteq \ker u^{k+1}$.

   Il suffit de constater que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{k+1} = u \circ u^k$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\ker u^k = \ker u^{k+1}$. Montrer que $\ker u^{k+1} = \ker u^{k+2}$.

   L'inclusion directe provient de la question précédente.
   Soit maintenant $x \in \ker u^{k+2}$. *On a* $0_E = u^{k+2}(x) = u^{k+1}(u(x))$, *c'est-à-dire* $u(x) \in \ker u^{k+1}$.
   D'après l'hypothèse, on en déduit $u(x) \in \ker u^k$, *c'est-à-dire* $u^{k+1}(x) = u^k(u(x)) = 0_E$, *c'est-à-dire* $x \in \ker u^{k+1}$, *ce qui conclut.*

3. Déduire de ce qui précède l'existence de $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{0_E\} = \ker u^0 \subsetneq \ker u^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker u^p = \ker u^{p+1} = \ker u^{p+2} = \cdots$$

   Une suite strictement croissante d'entiers naturels $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ *(car* $\forall n \in \mathbb{N}, d_n \geqslant n$, *c'est un lemme du cours sur les extractrices). On en déduit que la suite* $\left(\dim \ker u^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, *croissante d'après la première question mais majorée par* $\dim E$ *de manière évidente, ne peut pas être strictement croissante.*
   On peut donc trouver un entier $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $\dim \ker u^{p+1} = \dim \ker u^p$. *Toute partie non vide de* $\mathbb{N}$ *possédant un minimum, on peut même supposer que* p *est le plus petit entier vérifiant cette propriété.*
   On a donc à ce stade

$$0 = \dim \ker u^0 < \dim \ker u^1 < \cdots < \dim \ker u^p = \dim \ker u^{p+1},$$

   ce qui montre a fortiori *l'aspect strict des premières inclusions :*

$$\{0_E\} = \ker u^0 \subsetneq \ker u^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker u^p.$$

   Par ailleurs, l'égalité $\dim \ker u^p = \dim \ker u^{p+1}$ *montre* $\ker u^p = \ker u^{p+1}$, *par inclusion et égalité des dimensions.*
   On en déduit $\ker u^{p+1} = \ker u^{p+2}$ *d'après la question précédente puis, par une récurrence immédiate,* $\forall q \geqslant p, \ker u^q = \ker u^{q+1}$.

4. Montrer que l'entier p de la question précédente vérifie

$$E = \operatorname{im} u^0 \supsetneq \operatorname{im} u^1 \supsetneq \cdots \supsetneq \operatorname{im} u^p = \operatorname{im} u^{p+1} = \operatorname{im} u^{p+2} = \cdots$$

   Tout comme à la première question, on a déjà la suite d'inclusions

$$E = \operatorname{im} u^0 \supseteq \operatorname{im} u^1 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{im} u^p \supseteq \operatorname{im} u^{p+1} \supseteq \operatorname{im} u^{p+2} \supseteq \cdots$$

qui provient simplement du fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u$, *donc* $\operatorname{im} u^{n+1} \subseteq \operatorname{im} u^n$.
Par ailleurs, en tenant compte de ces inclusions « automatiques », pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a la chaîne d'équivalences*

$$\begin{aligned}
\operatorname{im} u^{n+1} = \operatorname{im} u^n &\Leftrightarrow \operatorname{rg} u^{n+1} = \operatorname{rg} u^n && \textit{(inclusion et égalité des dimensions)}\\
&\Leftrightarrow \dim E - \dim\ker u^{n+1} = \dim E - \dim \ker u^n && \textit{(théorème du rang)}\\
&\Leftrightarrow \dim\ker u^{n+1} = \dim\ker u^n\\
&\Leftrightarrow \ker u^{n+1} = \ker u^n && \textit{(inclusion et égalité des dimensions)}\\
&\Leftrightarrow n \geqslant p, && \textit{(question précédente)}
\end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$E = \operatorname{im} u^0 \supsetneq \operatorname{im} u^1 \supsetneq \cdots \supsetneq \operatorname{im} u^p = \operatorname{im} u^{p+1} = \operatorname{im} u^{p+2} = \cdots$$

5. **Décroissance des codimensions.** Dans cette question, on considère une application linéaire $\varphi : X \to Y$ entre deux espaces vectoriels de dimension finie, et un sous-espace vectoriel W de Y. On va montrer, de deux façons différentes, que $\dim X - \dim \varphi^{-1}[W] \leqslant \dim Y - \dim W$.

   Démonstration par la considération d'une application induite.

   (a) Montrer que φ induit une application linéaire $\varphi_W : \varphi^{-1}[W] \to W$, de noyau $\ker\varphi$ et d'image $W \cap \operatorname{im}\varphi$.

   ► *On a* $\forall x \in \varphi^{-1}[W], \varphi(x) \in W$, *donc* φ *induit une application* $\varphi_W : \varphi^{-1}[W] \to W$, *qui hérite de la linéarité de* φ, *car* $\varphi^{-1}[W]$ *et* W *sont bien des sous-espaces vectoriels de* X *et* Y, *respectivement (celui-ci par hypothèse, celui-là en tant qu'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire).*

   ► *On a*

   $$\ker\varphi_W = \left\{x \in \varphi^{-1}[W] \;\middle|\; \varphi(x) = 0_Y\right\} = \varphi^{-1}[W] \cap \ker\varphi.$$

   Or, on a $\ker\varphi = \varphi^{-1}[\{0_Y\}] \subseteq \varphi^{-1}[W]$, *donc* $\ker\varphi_W = \ker\varphi$.

   ► *Montrons l'égalité* $\operatorname{im}\varphi_W = W \cap \operatorname{im}\varphi$ *par double inclusion.*

   - *Soit* $y \in \operatorname{im}\varphi_W$ *: on peut donc trouver* $x \in \varphi^{-1}[W]$ *tel que* $y = \varphi(x)$.
     ▷ *Cela montre directement que* $y \in \operatorname{im}\varphi$.
     ▷ *Comme* $x \in \varphi^{-1}[W]$, *on a* $y \in W$.
     On en déduit $y \in W \cap \operatorname{im}\varphi$.
   - *Réciproquement, soit* $y \in W \cap \operatorname{im}\varphi$.
     ▷ *Comme* $y \in \operatorname{im}\varphi$, *on peut trouver* $x \in X$ *tel que* $y = \varphi(x)$.
     ▷ *Comme* $\varphi(x) = y \in W$, *on a* $x \in \varphi^{-1}[W]$.
     On en déduit que $y = \varphi(x) = \varphi_W(x) \in \operatorname{im}\varphi_W$, *ce qui conclut la démonstration.*

   (b) En déduire $\dim\varphi^{-1}[W] = \dim W + \dim X - \dim(W + \operatorname{im}\varphi)$.

   ► *D'après le théorème du rang, on a*

   $$\dim\varphi^{-1}[W] = \dim\ker\varphi_W + \operatorname{rg}\varphi_W = \dim\ker\varphi + \dim(W \cap \operatorname{im}\varphi).$$

   ► *D'après la formule de Grassmann,*

   $$\begin{aligned}
   \dim(W \cap \operatorname{im}\varphi) &= \dim W + \dim\operatorname{im}\varphi - \dim(W + \operatorname{im}\varphi)\\
   &= \dim W + \operatorname{rg}\varphi - \dim(W + \operatorname{im}\varphi).
   \end{aligned}$$

▶ *On en déduit*

$$\begin{aligned}\dim \varphi^{-1}[W] &= \dim W + \dim \ker \varphi + \operatorname{rg} \varphi - \dim(W + \operatorname{im} \varphi) \\ &= \dim W + \dim X - \dim(W + \operatorname{im} \varphi),\end{aligned}$$

d'après le théorème du rang.

(c) Conclure la démonstration.

La somme $W + \operatorname{im} \varphi$ *est un sous-espace vectoriel de* Y*, donc on a* $\dim(W + \operatorname{im} \varphi) \leqslant \dim Y$*. On en déduit*

$$\dim \varphi^{-1}[W] \geqslant \dim W + \dim X - \dim Y,$$

ce qui est équivalent à l'inégalité demandée.

Démonstration par dualité. On note $r = \dim Y - \dim W$.

On fixe alors r formes linéaires $\beta_1, \ldots, \beta_r \in Y^*$ telles que $W = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \beta_i$.

(d) Justifier l'existence de r formes linéaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in X^*$ telles que $\varphi^{-1}[W] = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \alpha_i$.

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$*, on définit* $\alpha_i = \beta_i \circ \varphi$*. Comme* $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$ *et* $\beta_i \in Y^* = \mathcal{L}(Y, K)$*, on a bien* $\alpha_i \in \mathcal{L}(X, K) = X^*$*.*

Montrons maintenant $\varphi^{-1}[W] = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \alpha_i$*.*

Soit $x \in X$*. On a la chaîne d'équivalences*

$$\begin{aligned} x \in \varphi^{-1}[W] &\Leftrightarrow \varphi(x) \in W \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, r]\!], \beta_i\big(\varphi(x)\big) = 0 \qquad \text{car } W = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \beta_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, r]\!], \alpha_i(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{r} \ker \alpha_i, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

(e) Conclure la démonstration.

Le sous-espace vectoriel $\varphi^{-1}[W]$ *est l'intersection de* r *hyperplans, donc sa codimension est au plus* r *d'après un théorème du cours, ce qui est exactement ce que l'on souhaitait démontrer.*

Décroissance des dimensions. Le résultat que l'on vient de montrer possède un résultat « dual » : avec les mêmes notations, si V est un sous-espace vectoriel de X, alors $\dim \varphi[V] \leqslant \dim V$.

(f) En vous inspirant de l'une (au choix) des deux preuves précédentes, montrer ce résultat (qui est, il faut bien le dire, beaucoup moins inspirant).

Avec une application. *L'application* φ *induit une application linéaire* $\varphi'_V : V \to \varphi[V]$*, dont on vérifie facilement qu'elle est surjective (et de noyau* $V \cap \ker \varphi$*, mais on s'en moque). Sa surjectivité montre directement* $\dim \varphi[V] \leqslant \dim V$*.*

En comptant des vecteurs. *Notons* $k = \dim V$*. On peut donc trouver une base* $v_1, \ldots, v_k$ *de* V*. On a alors* $\varphi[V] = \operatorname{Vect}\big(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)\big)$*, donc* $\dim \varphi[V] \leqslant k$*, ce qui est ce que l'on voulait montrer.*

6. **Un résultat de concavité**.

(a) En considérant l'application linéaire induite par u entre deux sous-espaces vectoriels bien choisis, montrer $\forall k \in \mathbb{N}, \dim\ker u^{k+2} - \dim\ker u^{k+1} \leqslant \dim\ker u^{k+1} - \dim\ker u^{k}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. *L'application* u *induit une application linéaire* $v_k : \ker u^{k+2} \to \ker u^{k+1}$ *et* $\ker u^k$ *est un sous-espace vectoriel du codomaine* $\ker u^{k+2}$.

On a donc $\dim\ker u^{k+2} - \dim v_k^{-1}[\ker u^k] \leqslant \dim\ker u^{k+1} - \dim\ker u^k$, *et il suffit de vérifier que* $v_k^{-1}[\ker u^k] = \ker u^{k+1}$ *pour conclure.*

Or, on a

$$\begin{aligned} v_k^{-1}[\ker u^k] &= \left\{ x \in \ker u^{k+2} \,\middle|\, v_k(x) \in \ker u^k \right\} \\ &= \left\{ x \in \ker u^{k+2} \,\middle|\, u(x) \in \ker u^k \right\} \\ &= \left\{ x \in \ker u^{k+2} \,\middle|\, x \in \ker u^{k+1} \right\} \\ &= \ker u^{k+2} \cap \ker u^{k+1} = \ker u^{k+1}. \end{aligned}$$

(b) Quel est le résultat correspondant sur la suite $(\operatorname{rg} u^k)_{k\in\mathbb{N}}$?

En utilisant le théorème du rang, on obtient $\forall k \in \mathbb{N}, \operatorname{rg} u^{k+1} - \operatorname{rg} u^{k+2} \leqslant \operatorname{rg} u^k - \operatorname{rg} u^{k+2}$.

En termes vagues, la suite des noyaux itérés croît, et celle des images itérées décroît, mais les deux le font de moins en moins vite.

Partie II. Décomposition de Fitting.

- Dans toute la suite, on posera

$$E_{\mathrm{nil}}(u) = \ker u^p \qquad \text{et} \qquad E_{\mathrm{inv}}(u) = \operatorname{im} u^p,$$

où $p \in \mathbb{N}$ est l'entier défini dans les questions 3 et 4.

- Si F est un sous-espace vectoriel de E,
  - on dira que F est *stable sous* u si $u[F] \subseteq F$;
  - si c'est le cas, l'application $F \to F$ induite par u (qui hérite de la linéarité de u), sera appelée *l'endomorphisme induit par* u *à* F.

7. **Induit nilpotent.**

(a) Montrer que $E_{\mathrm{nil}}(u)$ est un espace stable sous u et que l'endomorphisme u_{nil} induit par u sur $E_{\mathrm{nil}}(u)$ est nilpotent (c'est-à-dire qu'une puissance de u_{nil} est l'endomorphisme nul).

- *Les endomorphismes* u *et* u^p *commutent, donc* $E_{\mathrm{nil}}(u) = \ker u^p$ *est stable sous* u.
- *On a clairement* $u_{\mathrm{nil}}^p = 0_{\mathcal{L}(E_{\mathrm{nil}}(u))}$.

(b) Soit N un sous-espace vectoriel de E, stable sous u, tel que l'endomorphisme induit par u sur N soit nilpotent. Montrer que $N \subseteq E_{\mathrm{nil}}(u)$.

Soit $x \in N$. *Puisque l'induit de* u *à* N *est nilpotent, on peut trouver un entier naturel* $q \in \mathbb{N}$ *tel que* $u^q(x) = 0_E$, *c'est-à-dire que* $x \in \ker u^q$.

Or, la question 3 montre que $\forall q \in \mathbb{N}, \ker u^q \subseteq \ker u^p$, *donc* $x \in \ker u^p = E_{\mathrm{nil}}(u)$.

8. **Induit inversible.**

   (a) Montrer que $E_{inv}(u)$ est un espace stable sous u et que l'endomorphisme u_{inv} induit par u sur $E_{inv}(u)$ est un automorphisme.

   - *Les endomorphismes* u *et* u^p *commutent, donc* $E_{inv}(u) = \operatorname{im} u^p$ *est stable sous* u.
   - *Remarquons que* $E_{inv}(u) = \operatorname{im} u^p = \operatorname{im} u^{p+1}$.
     Soit maintenant $y \in E_{inv}(u)$. *On peut donc trouver* $z \in E$ *tel que* $y = u^{p+1}(z)$. *Le vecteur* $x = u^p(z)$ *est alors élément de* $\operatorname{im} u^p = E_{inv}(u)$ *et vérifie* $y = u(x)$.
     Cela montre que l'endomorphisme u_{inv} *est surjectif. Comme* $E_{inv}(u)$ *est de dimension finie, on en déduit que* $u_{inv} \in GL(E_{inv}(u))$.

   (b) Soit I un sous-espace vectoriel de E, stable sous u, tel que l'endomorphisme induit par u sur I soit un automorphisme. Montrer que $I \subseteq E_{inv}(u)$.

   Soit $y \in I$. *Comme l'endomorphisme* v *induit par* u *sur* I *est un automorphisme, sa puissance* p*-ième* v^p *est encore un automorphisme, donc on peut trouver* $x \in I$ *tel que* $y = v^p(x) = u^p(x)$. *On en déduit que* $y \in \operatorname{im} u^p = E_{inv}(u)$, *ce qui conclut.*

9. Montrer la *décomposition de Fitting* : $E = E_{nil}(u) \oplus E_{inv}(u)$.

   - *Montrons* $E_{nil}(u) \cap E_{inv}(u) = \{0_E\}$.
     Soit $y \in E_{nil}(u) \cap E_{inv}(u) = \ker u^p \cap \operatorname{im} u^p$.
     On peut donc trouver $x \in E$ *tel que* $y = u^p(x)$. *Comme* $y \in \ker u^p$, *on a* $u^{2p}(x) = 0$.
     Or, la question 3 montre que $\ker u^{2p} = \ker u^p$, *donc on a* $y = u^p(x) = 0_E$.
     Remarque dispensable. *Plus chic : l'intersection* $E_{nil}(u) \cap E_{inv}(u)$ *est un sous-espace vectoriel stable sous* u *sur lequel* u *induit un endomorphisme qui doit être à la fois nilpotent et un automorphisme : la seule solution de ce paradoxe apparent est que ce sous-espace stable doit être trivial. Car oui, l'unique endomorphisme de l'espace nul est à la fois nilpotent (c'est l'endomorphisme nul !) et un automorphisme (c'est l'identité !). Autrement dit, de manière peu surprenante, l'anneau des endomorphismes de l'espace nul est l'anneau nul...*
   - *Par ailleurs, d'après le théorème du rang, on a*

   $$\dim E_{nil}(u) + \dim E_{inv}(u) = \dim \ker u^p + \operatorname{rg} u^p = \dim E,$$

   donc les deux sous-espaces vectoriels $E_{nil}(u)$ *et* $E_{inv}(u)$ *sont supplémentaires.*

10. **Un contre-exemple en dimension infinie.** On suppose K de caractéristique nulle [1] et on considère l'endomorphisme de dérivation $D : \begin{cases} K[X] \to K[X] \\ P \mapsto P'. \end{cases}$
    Montrer qu'il n'existe pas deux sous-espaces vectoriels N et I, stables sous u, tels que l'induit de u sur N (resp. sur I) soit nilpotent (resp. un automorphisme) et que $K[X] = N \oplus I$.

    Supposons par l'absurde qu'il existe une telle décomposition.

    - *Montrons* $I = \{0_{K[X]}\}$. *Notons* D_I *l'endomorphisme induit par* D *sur* I. *Soit* $P \in I$.
      Si $k > \deg P$ *(que celui-ci soit un entier naturel ou* $-\infty$*), on a* $D^k(P) = 0_{K[X]}$. *On en déduit que* $P \in \ker(D_I^k)$.
      Or, D_I *est un automorphisme, donc sa puissance* D_I^k *en est aussi un. On en déduit* $P = 0_{K[X]}$.
    - *Ainsi, on doit avoir* $N = K[X]$, *c'est-à-dire que* D *est nilpotent.*
      Or, cela n'est pas vrai : pour tout $k \in \mathbb{N}$, *on a* $D^k(X^k) = k! \neq 0_{K[X]}$ *(car* $\operatorname{car}(K) = 0$*), donc* $D^k \neq 0_{\mathcal{L}(K[X])}$, *ce qui montre que* D *n'est pas nilpotent, et conclut.*

1. Hypothèse oubliée dans la version distribuée... En caractéristique $p > 0$, l'endomorphisme de dérivation est nilpotent car il vérifie $D^p = 0_{\mathcal{L}(K[X])}$, donc on a la décomposition de Fitting donnée par $E_{nil}(D) = K[X]$ et $E_{inv}(D) = \{0_{K[X]}\}$. Si l'on veut un exemple qui fonctionne en toute caractéristique, l'endomorphisme de $K^{(\mathbb{N})}$ donné par $u \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ fonctionne.

Remarque. La subtilité est que D *est* localement nilpotent *:* $\forall P \in \mathbb{K}[X], \exists p \in \mathbb{N} : D^p(P) = 0$, *mais qu'il n'y a pas de borne sur l'entier* p, *indépendamment du polynôme* P. *On voit assez facilement que ce phénomène ne peut pas se produire en dimension finie.*

Partie III. Indécomposabilité.

> Dans cette partie, on considère un ensemble $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(E)$ d'endomorphismes de E.
>
> - Un sous-espace vectoriel F de E est dit *$\mathcal{A}$-stable* si $\forall a \in \mathcal{A}, a[F] \subseteq F$.
>   Pour gagner du temps, on écrira *$\mathcal{A}$-espace* au lieu de *sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$-stable*.
> - Un $\mathcal{A}$-espace non trivial M de E est dit *décomposable* s'il existe deux $\mathcal{A}$-espaces non triviaux F_1 et F_2 tels que $M = F_1 \oplus F_2$. Il est dit *indécomposable* dans le cas contraire.
> - Si F_1, F_2 sont deux $\mathcal{A}$-espaces, une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(F_1, F_2)$ est dite *équivariante* si l'on a $\forall x \in F_1, \forall a \in A, \varphi\big(a(x)\big) = a\big(\varphi(x)\big)$.
>   On note $\text{Éq}(F_1, F_2)$ l'ensemble des applications linéaires équivariantes de F_1 vers F_2, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F_1, F_2)$ (on ne demande pas de le vérifier).
>   Naturellement, on abrège $\text{Éq}(F_1, F_1)$ en $\text{Éq}(F_1)$.

11. **Un exemple.** Dans cette question uniquement, $E = \mathbb{K}^2$ et $\mathcal{A}$ est l'ensemble des endomorphismes canoniquement associés aux matrices de $T_2^+(\mathbb{K})$.

   (a) Soit F un $\mathcal{A}$-espace.

   i. On suppose que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F$. Montrer $F = \mathbb{K}^2$.

   $$\textit{Soit } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2. \textit{ On a alors } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}}_{\in T_2^+(\mathbb{K})} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in F} \in F.$$

   ii. On suppose maintenant qu'il existe un élément de F n'appartenant pas à $\operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer $F = \mathbb{K}^2$.

   Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *un élément de* F *n'appartenant pas à* $\operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *c'est-à-dire tel que* $y \neq 0$.

   On a alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & -x \\ 0 & 1/y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *donc* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F$, *et la question précédente montre que* $F = \mathbb{K}^2$.

   (b) Montrer qu'il existe exactement trois $\mathcal{A}$-espaces, que l'on déterminera.

   Les sous-espaces vectoriels $\{0_{\mathbb{K}^2}\}$ *et* $\mathbb{K}^2$ *sont clairement des* $\mathcal{A}$*-espaces et* $\operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *en est un autre car, pour tous* $a, b, c, x \in \mathbb{K}$, *on a* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Montrons qu'il n'y en n'a pas d'autres : soit F *un* $\mathcal{A}$*-espace.*

   - *Naturellement, si* $\dim F \neq 1$, *on a* $F = \{0_{\mathbb{K}^2}\}$ *ou* $F = \mathbb{K}^2$.
   - *Supposons donc* $\dim F = 1$, *et soit* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *un élément non nul de* F. *Par inclusion et égalité des dimensions, il vient* $F = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
     Si y *était non nul, la question précédente montrerait* $F = \mathbb{K}^2$, *ce qui contredit notre hypothèse sur la dimension de* F. *On en déduit donc* $y \neq 0$, *d'où* $F = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) En déduire que E est indécomposable.

S'il existait une décomposition $E = F_1 \oplus F_2$ *en deux* $\mathcal{A}$*-espaces non triviaux, on devrait avoir* $\dim F_1 = \dim F_2 = 1$*, ce qui entraînerait* $F_1 = F_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *d'après la classification que l'on vient de faire. C'est évidemment une absurdité, car* $F_1 \cap F_2 \neq \{0_E\}$*.*

12. Montrer que la somme (resp. l'intersection) de deux $\mathcal{A}$-espaces est encore un $\mathcal{A}$-espace.

La démonstration s'écrit toute seule : soit F_1 *et* F_2 *deux* $\mathcal{A}$*-espaces.*

- ▶ *La somme* $F_1 + F_2$ *est déjà un sous-espace vectoriel de* E*. Soit maintenant* $a \in \mathcal{A}$ *et* $x \in F_1 + F_2$*. On peut trouver* $x_1 \in F_1$ *et* $x_2 \in F_2$ *tels que* $x = x_1 + x_2$*, d'où*

$$a(x) = \underbrace{a(x_1)}_{\in F_1} + \underbrace{a(x_2)}_{\in F_2} \in F_1 + F_2.$$

- ▶ *L'intersection* $F_1 \cap F_2$ *est déjà un sous-espace vectoriel de* E*. Soit* $a \in \mathcal{A}$ *et* $x \in F_1 \cap F_2$*.*
  - *Comme* $x \in F_1$*, qui est un* $\mathcal{A}$*-espace, on a* $a(x) \in F_1$*.*
  - *De même,* $a(x) \in F_2$*.*

  On en déduit $a(x) \in F_1 \cap F_2$*, ce qui conclut.*

Notons que ces deux résultats resteraient vrais pour la somme (resp. l'intersection) d'une famille quelconque de $\mathcal{A}$*-espaces, avec essentiellement les mêmes démonstrations.*

13. Soit F un $\mathcal{A}$-espace. Montrer que Éq(F) est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(F)$.

- ▶ *L'identité est clairement équivariante. Cela montre notamment que* Éq(F) *n'est pas vide*[2]*.*
- ▶ *Soit* $\varphi_1, \varphi_2 \in$ Éq(F) *et* $\lambda \in K$*. Montrons* $\varphi_1 + \lambda\varphi_2 \in$ Éq(F)*.*
  Soit $x \in F$ *et* $a \in \mathcal{A}$*. On a*

$$\begin{aligned}
\big(\varphi_1 + \lambda\varphi_2\big)(a(x)) &= \varphi_1\big(a(x)\big) + \lambda\varphi_2\big(a(x)\big) \\
&= a\big(\varphi_1(x)\big) + \lambda a\big(\varphi_2(x)\big) && \textit{(car } \varphi_1, \varphi_2 \in \text{Éq(F)}\textit{)} \\
&= a\big(\varphi_1(x) + \lambda\varphi_2(x)\big) && \textit{(car } a \textit{ linéaire)} \\
&= a\big((\varphi_1 + \lambda\varphi_2)(x)\big).
\end{aligned}$$

Cela montre déjà que Éq(F) *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(F)$*.*

- ▶ *Reste à montrer la stabilité par composition. Soit* $\varphi_1, \varphi_2 \in$ Éq(F)*. Montrons* $\varphi_2 \circ \varphi_1 \in$ Éq(F)*.*
  Soit $x \in F$ *et* $a \in \mathcal{A}$*. On a*

$$\begin{aligned}
(\varphi_2 \circ \varphi_1)\big(a(x)\big) &= \varphi_2\big(a(\varphi_1(x))\big) && \textit{(car } \varphi_1 \in \text{Éq(F)}\textit{)} \\
&= a\big(\varphi_2(\varphi_1(x))\big) && \textit{(car } \varphi_2 \in \text{Éq(F)}\textit{)} \\
&= a\big((\varphi_2 \circ \varphi_1)(x)\big).
\end{aligned}$$

14. Soit F un $\mathcal{A}$-espace et $\varphi \in$ Éq(F). Montrer que $\ker\varphi$ et $\mathrm{im}\,\varphi$ sont des $\mathcal{A}$-espaces.

- ▶ *Le noyau* $\ker\varphi$ *est déjà un sous-espace vectoriel de* E*. Soit maintenant* $a \in \mathcal{A}$ *et* $x \in \ker\varphi$*. On a* $\varphi\big(a(x)\big) = a\big(\varphi(x)\big) = a(0_E) = 0_E$*, donc* $a(x) \in \ker\varphi$*.*
- ▶ *L'image* $\mathrm{im}\,\varphi$ *est déjà un sous-espace vectoriel de* E*. Soit maintenant* $a \in \mathcal{A}$ *et* $y \in \mathrm{im}\,\varphi$*. On peut donc trouver* $x \in E$ *tel que* $y = \varphi(x)$*. Ainsi,* $a(y) = a\big(\varphi(x)\big) = \varphi\big(a(x)\big) \in \mathrm{im}\,\varphi$*.*

2. On n'a donc pas besoin de vérifier que l'endomorphisme nul appartient à Éq(F), même si ça n'est pas une économie très significative.

15. Soit F_1 et F_2 deux $\mathcal{A}$-espaces en somme directe. Montrer que le projecteur p sur F_1 parallèlement à F_2 (qui est donc un endomorphisme de $F_1 \oplus F_2$) appartient à $\text{Éq}(F_1 \oplus F_2)$.

Soit $x = x_1 + x_2 \in F_1 \oplus F_2$ *et* $a \in \mathcal{A}$. *On a* $a(x) = \underbrace{a(x_1)}_{\in F_1} + \underbrace{a(x_2)}_{\in F_2}$, *donc*

$$p\big(a(x)\big) = a(x_1) = a\big(p(x)\big),$$

ce qui montre $p \in \text{Éq}(F_1 \oplus F_2)$.

16. Soit M un $\mathcal{A}$-espace non trivial. En utilisant la décomposition de Fitting, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) M est indécomposable ;
   (ii) tout élément de $\text{Éq}(M)$ est un automorphisme ou nilpotent ;
   (iii) pour tout $\varphi \in \text{Éq}(M)$, l'une des deux applications φ et[3] $\mathrm{id}_M - \varphi$ est un automorphisme.

- *Supposons que* M *soit indécomposable. Soit* $\varphi \in \text{Éq}(M)$. *On considère sa décomposition de Fitting* $M = M_{\text{nil}}(\varphi) \oplus M_{\text{inv}}(\varphi)$ *et un entier* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $M_{\text{nil}}(\varphi) = \ker \varphi^p$ *et* $M_{\text{inv}}(\varphi) = \operatorname{im} \varphi^p$.
  Comme $\varphi \in \text{Éq}(M)$ *et que* $\text{Éq}(M)$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{L}(M)$, *la puissance* φ^p *appartient encore à* $\text{Éq}(M)$.
  D'après la question 14, les sous-espaces vectoriels $M_{\text{nil}}(\varphi) = \ker \varphi^p$ *et* $M_{\text{inv}}(\varphi) = \operatorname{im} \varphi^p$ *sont donc deux* $\mathcal{A}$*-espaces tels que* $M = M_{\text{nil}}(\varphi) \oplus M_{\text{inv}}(\varphi)$.
  Par indécomposabilité, on doit donc avoir $M_{\text{nil}}(\varphi) = \{0_E\}$, *auquel cas* $M_{\text{inv}}(\varphi) = M$, *et* φ *est un automorphisme, ou* $M_{\text{inv}}(\varphi) = \{0_E\}$, *auquel cas* $M_{\text{nil}}(\varphi) = M$, *et* φ *est nilpotent.*
- *Supposons que tout élément de* $\text{Éq}(M)$ *est un automorphisme ou est nilpotent. Soit* $\varphi \in \text{Éq}(M)$. *Supposons que* φ *n'est pas un automorphisme et déduisons-en que* $\mathrm{id}_M - \varphi$ *est un automorphisme.*
  Par hypothèse, φ *est nilpotent, et il suffit de vérifier que* $\mathrm{id}_M - \varphi$ *n'est pas nilpotent pour conclure.*
  Or, la somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent est nilpotente (en effet, si φ *et* ψ *commutent et que* $\varphi^p = \psi^q = 0_{\mathcal{L}(M)}$, *on a* $(\varphi + \psi)^{p+q} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} \underbrace{\varphi^k}_{=0 \text{ si } k \geqslant p} \underbrace{\psi^{p+q-k}}_{=0 \text{ si } k \leqslant p} = 0_{\mathcal{L}(M)}$*).*
  Comme φ *et* $\mathrm{id}_M - \varphi$ *commutent, que leur somme* id_M *n'est pas nilpotente (parce que* M *a été supposé non trivial !), on ne peut donc pas avoir* $\mathrm{id}_M - \varphi$ *nilpotente, ce qui montre que* $\mathrm{id}_E - \varphi$ *est un automorphisme.*
- *Supposons maintenant que, pour tout* $\varphi \in \text{Éq}(M)$, *l'un des deux endomorphismes* φ *et* $\mathrm{id}_M - \varphi$ *soit un automorphisme, et montrons que* M *est indécomposable.*
  Soit M_1, M_2 *deux* $\mathcal{A}$*-espaces inclus dans* M *tels que* $M = M_1 \oplus M_2$.
  D'après la question 15, le projecteur p *sur* M_1 *parallèlement à* M_2 *appartient à* $\text{Éq}(M)$, *donc lui ou son projecteur associé* $p' = \mathrm{id}_M - p$, *qui est le projecteur sur* M_2 *parallèlement à* M_1, *est un automorphisme.*
  - *Si* p *est un automorphisme,* $M_1 = \ker p$ *est l'espace nul.*
  - *Si* p' *est un automorphisme,* $M_2 = \ker p'$ *est l'espace nul.*

  Cela démontre que M *est indécomposable.*

3. Coquille dans la version distribuée.

Partie IV. Théorème de Krull-Schmidt.

On reprend les notations de la partie précédente, et on rajoute une définition.

- Un *isomorphisme équivariant* entre deux $\mathcal{A}$-espaces F_1 et F_2 est une application $\varphi \in \text{Éq}(F_1, F_2)$ qui est un isomorphisme.

17. Montrer qu'il existe des $\mathcal{A}$-espaces indécomposables $M_1, \dots, M_r$ tels que $E = M_1 \oplus M_2 \dots \oplus M_r$.

    On pourrait procéder par récurrence sur la dimension de E. *Pour changer un peu, on va rédiger cette question avec des arguments de maximalité, ce qui revient essentiellement au même.*
    Considérons l'ensemble R *des entiers* $r \in \mathbb{N}^*$ *tels qu'il existe des* $\mathcal{A}$*-espaces non triviaux* $M_1, \dots, M_r$ *tels que* $E = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$.

    - *Cet ensemble* R *est non vide car* $1 \in R$, *en considérant* $M_1 = E$.
    - *Cet ensemble est majoré car, dans une décomposition* $E = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$, *on a* $\dim E = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\dim M_i}_{\geqslant 1} \geqslant r$.

    On peut donc poser $r = \max R$ *et considérer une décomposition* $E = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ *en* $\mathcal{A}$*-espaces non triviaux.*
    Il reste à montrer que les M_i *sont indécomposables : soit* $i_0 \in [\![1, r]\!]$ *et* M'_{i_0}, M''_{i_0} *deux* $\mathcal{A}$*-espaces inclus dans* M_{i_0} *tels que* $M_{i_0} = M'_{i_0} \oplus M''_{i_0}$. *On a alors la décomposition en* $r+1$ $\mathcal{A}$*-espaces :*

    $$E = \bigoplus_{i<i_0} M_i \oplus (M'_{i_0} + M''_{i_0}) \oplus \bigoplus_{i>i_0} M_i.$$

    (Il faut vérifier que la somme reste directe, mais c'est quasiment immédiat).
    Comme $r = \max R$, *on a* $r+1 \notin R$, *ce qui montre que l'un des* $\mathcal{A}$*-espaces apparaissant dans la décomposition est trivial. Cela ne peut être que l'un des deux « nouveaux » :* M'_{i_0} *et* M''_{i_0}, *ce qui achève la démonstration de l'indécomposabilité de* M_{i_0}.

On s'intéresse dans la suite à l'unicité (à équivalence près) de cette décomposition.
On suppose donc qu'il existe des $\mathcal{A}$-espaces indécomposables $M_1, \dots, M_r, N_1, \dots, N_s$ tels que

$$E = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_r = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_s,$$

et l'on veut montrer que $r = s$ et que, à renumérotation près des facteurs, il existe pour tout i un isomorphisme équivariant $M_i \to N_i$.
La démonstration se fait par récurrence sur r : pour l'hérédité, il s'agit de montrer qu'il existe un entier $j \in [\![1, s]\!]$ et deux isomorphismes équivariants $M_1 \to N_j$ et $M'_1 = \bigoplus_{\substack{k \in [\![1,r]\!] \\ k \neq 1}} M_k \to \bigoplus_{\substack{\ell \in [\![1,s]\!] \\ \ell \neq j}} N_\ell = N'_j$.
Pour ne pas alourdir davantage les notations, nous n'allons montrer que cette étape-clef.

- Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note $M'_i = \bigoplus_{\substack{k \in [\![1,r]\!] \\ k \neq i}} M_k$, p_i le projecteur sur M_i parallèlement à M'_i et $p'_i = \mathrm{id}_E - p_i$ le projecteur sur M'_i parallèlement à M_i.
- On définit de façon analogue les espaces N'_j et les projecteurs q_j et q'_j, pour tout $j \in [\![1, s]\!]$.
- D'après la question 15, tous ces projecteurs sont équivariants.

18. Pour tout $j \in [\![1, s]\!]$,
   - le projecteur q_j induit une application linéaire équivariante $\pi_j \in \text{Éq}(M_1, N_j)$;
   - le projecteur p_1 induit une application linéaire équivariante $\theta_j \in \text{Éq}(N_j, M_1)$.

   On va montrer qu'il existe $j \in [\![1, s]\!]$ tel que $\theta_j \circ \pi_j$ soit un automorphisme de M_1.

   (a) Montrer que pour tous $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in \text{Éq}(M_1)$, si la somme $\varphi_1 + \cdots + \varphi_s$ est un automorphisme de M_1, alors il existe $j \in [\![1, s]\!]$ tel que φ_j soit un automorphisme de M_1.

   À l'aide d'une petite récurrence sur r*, il suffit de traiter le cas* $r = 2$ *de la question. Soit donc* $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Éq}(M_1)$ *tels que* $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2$ *soit un automorphisme.*
   En composant par Φ^{-1}*, il vient* $\Phi^{-1} \circ \varphi_1 + \Phi^{-1} \circ \varphi_2 = \mathrm{id}_E$.
   Or, d'après la question 16, nous avons que $\Phi^{-1} \circ \varphi_1$ *ou* $\mathrm{id}_E - (\Phi^{-1} \circ \varphi_1) = \Phi^{-1} \circ \varphi_2$ *est un automorphisme.*
   En composant par Φ*, on obtient que* φ_1 *ou* φ_2 *est un automorphisme, ce qui conclut.*

   (b) Pour tout $x \in M_1$, calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{s} \theta_j(\pi_j(x))$.

   Soit $x \in M_1$. *On a* $\displaystyle\sum_{j=1}^{s} \theta_j(\pi_j(x)) = \sum_{j=1}^{s} p_1(q_j(x)) = p_1\left(\sum_{j=1}^{s} q_j(x)\right) = p_1(x) = x.$

   (c) Conclure.

   La question précédente donne $\displaystyle\sum_{j=1}^{s} \theta_j \circ \pi_j = \mathrm{id}_{M_1}$.
   D'après la première sous-question, cela entraîne l'existence de $j \in [\![1, s]\!]$ *tel que* $\theta_j \circ \pi_j$ *soit un automorphisme.*

19. En notant $\sigma_j = (\theta_j \circ \pi_j)^{-1} \circ \theta_j$, on obtient ainsi deux applications linéaires $\sigma_j \in \mathcal{L}(N_j, M_1)$ et $\pi_j \in \text{Éq}(M_1, N_j)$ telles que $\sigma_j \circ \pi_j = \mathrm{id}_{M_1}$.

   (a) Montrer que $\pi_j \circ \sigma_j \in \text{Éq}(N_j)$ est un projecteur, de noyau $\ker \sigma_j$ et d'image $\operatorname{im} \pi_j$.

   - *On a* $(\pi_j \circ \sigma_j)^2 = \pi_j \circ \underbrace{(\sigma_j \circ \pi_j)}_{=\mathrm{id}_E} \circ \sigma_j = \pi_j \circ \sigma_j$, *donc* $\pi_j \circ \sigma_j$ *est un projecteur.*
   - *On a* $\ker(\sigma_j) \subseteq \ker(\pi_j \circ \sigma_j) \subseteq \ker(\sigma_j \circ \pi_j \circ \sigma_j) = \ker(\sigma_j)$, *ce qui montre* $\ker(\sigma_j) = \ker(\pi_j \circ \sigma_j)$ *par double inclusion.*
   - *De même,* $\operatorname{im}(\pi_j) = \operatorname{im}(\pi_j \circ \sigma_j \circ \pi_j) \subseteq \operatorname{im}(\pi_j \circ \sigma_j) \subseteq \operatorname{im}(\pi_j)$.

   (b) En déduire que π_j et σ_j sont deux isomorphismes équivariants, réciproques l'un de l'autre.

   Par composition, $\pi_j \circ \sigma_j$ *est équivariant, donc son noyau et son image sont des* $\mathcal{A}$*-espaces.*
   On a ainsi obtenu une décomposition $N_j = \ker(\pi_j \circ \sigma_j) \oplus \operatorname{im}(\pi_j \circ \sigma_j) = \ker(\sigma_j) \oplus \operatorname{im}(\pi_j)$.
   Comme N_j *est indécomposable, l'un des facteurs de cette décomposition est trivial.*
   - *Si l'on avait* $\operatorname{im}(\pi_j) = \{0_E\}$*, on aurait* $\ker(\sigma_j) = N_j$*, c'est-à-dire que les deux applications* π_j *et* σ_j *seraient nulles.*
     Cela contredit le fait que $\sigma_j \circ \pi_j = \mathrm{id}_{M_1}$ *(car l'espace* M_1 *n'est pas trivial, donc* id_{M_1} *n'est pas l'application nulle).*
   - *On est donc nécessairement dans le cas* $\operatorname{im}(\pi_j) = N_j$ *et* $\ker(\sigma_j) = \{0_E\}$*, ce qui montre que* π_j *est surjectif et* σ_j *injectif.*
     Comme la relation $\sigma_j \circ \pi_j = \mathrm{id}_{M_1}$ *montre que, réciproquement,* σ_j *est surjectif et* π_j *injectif, les deux applications sont des isomorphismes.*
     Ils sont alors réciproques l'un de l'autre, comme on le voit en composant (par exemple) à gauche l'égalité $\sigma_j \circ \pi_j = \mathrm{id}_{M_1}$ *par* σ_j^{-1}.

20. Montrer que l'application $\pi'_j \in \text{Éq}(M'_1, N'_j)$ induite par q'_j est également un isomorphisme équivariant, ce qui conclut la démonstration.

On a déjà $M_1 \oplus M'_1 = N_j \oplus N'_j$. *Comme* M_1 *et* N_j *sont isomorphes, ces deux espaces ont la même dimension.*
On en déduit que M'_1 *et* N'_j *ont également la même dimension, et il reste simplement à démontrer que* π'_j *est injectif.*
Soit $x \in \ker \pi'_j$ *: on a donc à la fois* $x \in M'_1$ *et* $q'_j(x) = 0_E$*, c'est-à-dire* $x \in \ker q'_j = N_j$.
Comme $x \in M'_1$*, on a* $p_1(x) = 0_E$*, ce qui se réécrit* $\theta_j(x) = 0_E$*, car* $x \in N_j$.
En appliquant σ_j*, il vient* $\sigma_j\big(\theta_j(x)\big) = 0_E$.
On vient de voir que $\sigma_j \circ \theta_j$ *était un isomorphisme* $N_j \to M_1$ *: l'annulation précédente montre donc que* $x = 0_E$*, ce qui conclut la démonstration.*