DM 22 : théorème de Fejér et équirépartition [corrigé]

- On note $\mathcal{C}_{\text{pér}}$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 1-périodiques.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note e_k la fonction $x \mapsto \exp\left(i\,2\pi\,k\,x\right)$, qui est un élément de $\mathcal{C}_{\text{pér}}$.
- Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$, on définit le k-*ième coefficient de Fourier*

$$c_k(f) = \int_0^1 f(y)\, e_{-k}(y)\, dy \in \mathbb{C}.$$

- Enfin, pour $n, N \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$, on définit les fonctions $S_n[f]$ et $\Sigma_N[f]$ par

$$S_n[f] = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k \qquad \text{et} \qquad \Sigma_N[f] = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f).$$

Partie I. Préliminaires.

1. Soit $f \in C^0([0,1];\mathbb{C})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On définit $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\widetilde{f} : x \mapsto f\big(x - \lfloor x \rfloor\big)$. Montrer $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$.

   - *La fonction $\widetilde{f}$ est 1-périodique car $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ l'est.*
   - *La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ coïncide au voisinage de tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ avec une fonction constante, donc elle est continue en ce point. Par opérations, $\widetilde{f}$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.*
   - *Soit $a \in \mathbb{Z}$. On a*
     - $x - \lfloor x \rfloor \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x < a}]{} 1$ *donc, par continuité de f,* $\widetilde{f}(x) = f\big(x - \lfloor x \rfloor\big) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x < a}]{} f(1)$;
     - $x - \lfloor x \rfloor \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} 0$ *donc, par continuité de f,* $\widetilde{f}(x) = f\big(x - \lfloor x \rfloor\big) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x < a}]{} f(0)$;

     les limites à droite et à gauche étant égales à $f(0) = f(1) = \widetilde{f}(a)$, on en déduit que $\widetilde{f}$ est continue en a.

   Ainsi, $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$.

2. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ est bornée.

   On a fait cet exercice en TD : le théorème des bornes atteintes entraîne que f est bornée sur le segment $[0,1]$, et la périodicité entraîne que $f[\mathbb{R}] = f\big[[0,1]\big]$, donc le caractère borné de f sur $[0,1]$ s'étend à $\mathbb{R}$ tout entier.

On notera $\|f\|_\infty = \sup\left\{ \left|f(x)\right| \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$ la norme uniforme d'un élément $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$.

3. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

   On a également fait cet exercice en TD.
   D'après le théorème de Heine, la restriction de f au segment $[-1,2]$ est uniformément continue.
   Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité, on peut trouver $\delta > 0$ (que l'on peut supposer $\leqslant 1$) tel que $\forall x, y \in [-1,2]\,, |x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
   Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leqslant \delta$. Posons $T = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, $x' = x - T$ et $y' = y - T$.
   On a donc $x' \in [0,1]$ et, comme $|x-y| \leqslant \delta \leqslant 1$, on a $y' \in [-1,2]$.
   Naturellement, on a encore $\left|x' - y'\right| \leqslant \delta$. Ainsi, $|f(x) - f(y)| = \left|f(x') - f(y')\right| \leqslant \varepsilon$.

Partie II. Théorème de Fejér.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit le *noyau de Fejér* $K_N \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ par

$$K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} e_k.$$

4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 K_N(y)\, dy = 1$.

   Soit $k \in \mathbb{Z}$.
   On a $\displaystyle\int_0^1 e_0 = \int_0^1 dt = 1$ *et, si* $k \neq 0$, $\displaystyle\int_0^1 e_k = \left[\frac{1}{i\,2\pi\,k} \exp(i\,2\pi\,k\,x)\right]_{x=0}^{1} = 0$, *donc* $\displaystyle\int_0^1 e_k = \delta_{k,0}$.
   Par linéarité de l'intégrale, on en déduit

$$\int_0^1 K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 e_k = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} \delta_{k,0} = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 = 1.$$

5. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer que

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin\big((N+1)\pi x\big)}{\sin(\pi x)}\right)^2.$$

   - *Commençons par un calcul auxiliaire : pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} e_k(x) &= \exp(-i\,2\pi\,n\,x) \sum_{k=0}^{2n} \exp(i\,2\pi\,k\,x) \\
&= \exp(-i\,2\pi\,n\,x) \frac{\exp(i\,2\pi\,(2n+1)\,x) - 1}{\exp(i\,2\pi\,x) - 1} \qquad \textit{car } \exp(i\,2\pi\,x) \neq 1 \\
&= \frac{\exp(-i\,2\pi\,n\,x)\,\exp(i\,\pi\,(2n+1)\,x)}{\exp(i\,\pi\,x)} \, \frac{\exp(i\,\pi\,(2n+1)\,x) - \exp(-i\,\pi\,(2n+1)\,x)}{\exp(i\,\pi\,x) - \exp(-i\,\pi\,x)} \\
&= \frac{\sin\big(\pi\,(2n+1)\,x\big)}{\sin(\pi\,x)}.
\end{aligned}$$

   - *On a*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \exp\big(i\,\pi\,(2n+1)\,x\big) &= \exp(i\,\pi\,x) \sum_{n=0}^{N} \exp\big(i\,2\pi\,n\,x\big) \\
&= \exp(i\,\pi\,x) \frac{\exp\big(i\,2\pi\,(N+1)\,x\big) - 1}{\exp(i\,2\pi\,x) - 1} \qquad \textit{car } \exp(i\,2\pi\,x) \neq 1 \\
&= \frac{\exp(i\,\pi\,x)\,\exp\big(i\,\pi\,(N+1)\,x\big)}{\exp(i\,\pi\,x)} \, \frac{\exp\big(i\,\pi\,(N+1)\,x\big) - \exp\big(-i\,\pi\,(N+1)\,x\big)}{\exp(i\,\pi\,x) - \exp(i\,\pi\,x)} \\
&= \exp\big(i\,\pi\,(N+1)\,x\big) \, \frac{\sin\big(\pi\,(N+1)\,x\big)}{\sin(\pi\,x)}.
\end{aligned}$$

   - *Maintenant, pour tout* $N \in \mathbb{N}$,

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\big(\pi\,(2n+1)\,x\big)}{\sin(\pi\,x)}$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin(\pi x)} \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{N} \exp\left(i \pi (2n+1) x \right) \right)$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin(\pi x)} \operatorname{Im} \left(\exp\left(i \pi (N+1) x \right) \frac{\sin\left(\pi (N+1) x \right)}{\sin(\pi x)} \right)$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2\left(\pi (N+1) x \right)}{\sin^2(\pi x)},$$

ce qui conclut.

6. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $\Sigma_n[f](x) = \int_0^1 f(y)\, K_N(x-y)\, dy$.

   En utilisant la relation évidente $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{R}, e_{-k}(y) = e_k(-y)$ et la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\Sigma_n[f](x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} \left(\int_0^1 f(y)\, e_{-k}(y)\, dy \right) e_k(x)$$

$$= \int_0^1 f(y) \left(\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} \underbrace{e_k(-y)\, e_k(x)}_{e_k(x-y)} \right) dy$$

$$= \int_0^1 f(y)\, K_N(x-y)\, dy.$$

   (b) En déduire que $\Sigma_n[f](x) - f(x) = \int_0^1 \big(f(x-y) - f(x)\big) K_N(y)\, dy$.

   La question précédente et un changement de variables $y' = x - y$ ($dy' = -dy$) donne

$$\Sigma_n[f](x) = -\int_x^{x-1} f(x-y')\, K_N(y')\, dy' = \int_{x-1}^{x} f(x-y')\, K_N(y')\, dy'.$$

   En outre, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$, la fonction $x \mapsto \int_{x-1}^{x} g(y)\, dy = \int_0^x g - \int_0^{x-1} g$ est de classe C^1 (en vertu du théorème fondamental) et de dérivée $x \mapsto g(x) - g(x-1) = 0$, donc elle est constante. Ainsi, on a montré $\Sigma_n[f](x) = \int_0^1 f(x-y)\, K_N(y)\, dy$.

   Enfin, le fait que $\int_0^1 K_N = 1$ donne $f(x) = \int_0^1 f(x)\, K_N(y)\, dy$.

   On en déduit

$$\Sigma_n[f](x) - f(x) = \int_0^1 f(x-y)\, K_N(y)\, dt - \int_0^1 f(x)\, K_N(y)\, dy = \int_0^1 \big(f(x-y) - f(x)\big) K_N(y)\, dy.$$

7. **Théorème de Fejér.** Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$.

   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^\delta |f(x-y) - f(x)|\, K_N(y)\, dy \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_{1-\delta}^1 |f(x-y) - f(x)|\, K_N(y)\, dy \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Remarquons que la question 5 et l'égalité $\forall x \in \mathbb{Z}, K_N(x) = N+1$ (que l'on peut vérifier en utilisant la continuité de K_N, ou en calculant la double somme) montrent que la fonction K_N est $\geqslant 0$.

D'après la question 3, on peut trouver $\delta > 0$ (que l'on peut supposer $< 1/2$) tel que l'on ait $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- *Pour tout $y \in [0, \delta]$, on a $|f(x-y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, donc, par croissance de l'intégrale et d'après la question 4,*

$$\int_0^\delta |f(x-y) - f(x)| \, K_N(y) \, dy \leqslant \int_0^\delta \varepsilon \, K_N(y) \, dy \leqslant \varepsilon \int_0^1 K_N(y) \, dy = \varepsilon.$$

- *Pour tout $y \in [1-\delta, 1]$, on a $|f(x-y) - f(x)| = |f(x-y) - f(x-1)| \leqslant \varepsilon$, à cause de l'inégalité $|(x-y) - (x-1)| \leqslant \delta$.*

  De la même façon qu'au point précédent, on obtient donc $\displaystyle\int_{1-\delta}^1 |f(x-y) - f(x)| \, K_N(y) \, dy \leqslant \varepsilon$.

(b) Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $\kappa_{\delta,f} > 0$ (qui dépend de δ et de f) telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)| \, K_N(y) \, dy \leqslant \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}.$$

- *Pour tout $y \in [\delta, 1-\delta]$, on a $\sin(\pi y) \geqslant \sin(\pi \delta) = \sin(\pi(1-\delta))$, d'après les variations et la symétrie du sinus. Ainsi, pour un tel y, on a*

$$\int_\delta^{1-\delta} K_n(y) \, dy \leqslant \frac{1}{N+1} \int_{1-\delta}^{\delta} \frac{\sin^2\left((N+1)\pi x\right)}{\sin^2(\pi \delta)} \, dy \leqslant \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin^2(\pi \delta)}.$$

- *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'inégalité triangulaire donne $|f(x-y) - f(x)| \leqslant 2 \, \|f\|_\infty$.*

On en déduit

$$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)| \, K_N(y) \, dy \leqslant 2 \, \|f\|_\infty \int_\delta^{1-\delta} K_n(y) \, dy \leqslant \frac{1}{N+1} \frac{2 \, \|f\|_\infty}{\sin^2(\pi \delta)},$$

ce qui conclut.

(c) En déduire que la suite de fonctions $\left(\Sigma_N[f]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, c'est-à-dire que $\left\|\Sigma_N[f] - f\right\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$.

D'après la question 7a, on peut trouver $\delta > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^\delta |f(x-y) - f(x)| \, K_N(y) \, dy \leqslant \varepsilon \qquad \textit{et} \qquad \int_{1-\delta}^1 |f(x-y) - f(x)| \, K_N(y) \, dy \leqslant \varepsilon.$$

On peut alors utiliser la question 7b, qui donne naissance à une constante $\kappa_{\delta,f} > 0$.

Comme $\dfrac{\kappa_{\delta,f}}{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$, on peut trouver $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geqslant N_0$, $\dfrac{\kappa_{\delta,f}}{N+1} \leqslant \varepsilon$. Pour un tel N, on a donc

$$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)| \, K_N(y) \, dy \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout $N \geqslant N_0$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a donc*

$$\begin{aligned}
|\Sigma_n[f](x) - f(x)| &= \left|\int_0^1 \big(f(x-y) - f(x)\big) K_N(y)\,dy\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |f(x-y) - f(x)|\, K_N(y)\,dy \\
&\leqslant \int_0^\delta |f(x-y) - f(x)|\, K_N(y)\,dy + \int_\delta^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)|\, K_N(y)\,dy \\
&\qquad + \int_{1-\delta}^1 |f(x-y) - f(x)|\, K_N(y)\,dy \\
&\leqslant 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Autrement dit, pour $N \geqslant N_0$, *on a* $\|\Sigma_n[f] - f\|_\infty \leqslant 3\varepsilon$, *ce qui conclut.*

Partie III. Équirépartition modulo 1.

Soit $\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.

- Pour toute partie $Y \subseteq [0,1]$ et tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, on notera

$$\gamma_N(\xi, Y) = \frac{1}{N}\left|\left\{ n \in [\![1,N]\!] \,\middle|\, \xi_n - \lfloor \xi_n \rfloor \in Y \right\}\right|.$$

- La suite ξ est dite *équirépartie modulo* 1, ou, en abrégé, *équirépartie*, si, pour tous $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on a

$$\gamma_N\left(\xi, \left[a,b\right]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b - a.$$

8. Montrer que la suite ξ est équirépartie si et seulement si, pour tous $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on a $\gamma_N\left(\xi, \left[a,b\right[\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$.

   - *Remarquons tout d'abord que les suites* $\gamma(\xi, \cdot)$ *vérifient une relation d'additivité évidente : si* Y_1 *et* Y_2 *sont deux parties disjointes, alors* $\forall N \in \mathbb{N}^*, \gamma_N(\xi, Y_1 \sqcup Y_2) = \gamma_N(\xi, Y_1) + \gamma_N(\xi, Y_2)$, *en vertu de la formule donnant le cardinal d'une union disjointe.*
   - *Supposons la suite équirépartie. Soit* $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. *Soit* $\varepsilon > 0$, *que l'on peut supposer* $< b - a$.
     - *On a évidemment* $\forall N \in \mathbb{N}^*, \gamma_N(\xi, [a,b[) \leqslant \gamma_N(\xi, [a,b])$. *Comme* $\gamma_N(\xi,[a,b]) \xrightarrow[N\to+\infty]{} b-a$ *par équirépartition, on a donc* $\gamma_N(\xi,[a,b[) \leqslant b - a + \varepsilon$ *à partir d'un certain rang.*
     - *De même, on a, pour tout* $N \in \mathbb{N}^*$, *l'inégalité* $\underbrace{\gamma_N(\xi,[a,b-\varepsilon/2])}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} b-a-\varepsilon/2} \leqslant \gamma_N(\xi,[a,b[)$, *donc* $\gamma_N(\xi,[a,b[) \geqslant b - a - \varepsilon$ *à partir d'un certain rang.*

     Les deux points précédents montrent $\gamma_N\left(\xi, \left[a,b\right[\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$ *et concluent la démonstration de l'implication directe.*
   - *Réciproquement, supposons que pour tous* $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, *on ait* $\gamma_N\left(\xi, \left[a,b\right[\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$.

     Soit $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.
     - *Si* $b = 1$, *la fonction partie fractionnaire* $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ *ne prenant jamais la valeur* 1, *on en déduit que* $\forall N \in \mathbb{N}^*, \gamma_N(\xi,[a,1[) = \gamma_N(\xi,[a,1])$ *et donc que* $\gamma_N(\xi,[a,1]) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1-a$.
     - *Supposons maintenant* $b < 1$. *On peut réutiliser les mêmes arguments que pour l'implication directe. Soit* $\varepsilon > 0$, *que l'on peut supposer* $< 1 - b$.

▷ *On a* $\forall N \in \mathbb{N}^*, \underbrace{\gamma_N(\xi, [a, b[)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} b-a} \leqslant \gamma_N(\xi, [a, b])$ *donc* $\gamma_N(\xi, [a, b]) \geqslant b - a - \varepsilon$ *à partir d'un certain rang.*

▷ *On a* $\forall N \in \mathbb{N}^*, \gamma_N(\xi, [a, b]) \leqslant \underbrace{\gamma_N(\xi, [a, b + \varepsilon/2[)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} b-a+\varepsilon/2}$ *donc* $\gamma_N(\xi, [a, b]) \leqslant b-a+\varepsilon$ *à partir d'un certain rang.*

On a donc montré $\gamma_N(\xi, [a, b]) \xrightarrow[N\to+\infty]{} b - a$*. Cela étant valable pour tous* a *et* b*, la suite est équirépartie.*

9. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$. Pour tout entier $M \in \mathbb{N}^*$, on notera $\Phi_M(f)$ la fonction 1-périodique coïncidant avec

$$\sum_{j=0}^{M-1} f\left(\frac{j}{M}\right) \mathbb{1}_{[\frac{j}{M}, \frac{j+1}{M}[}$$

sur l'intervalle $[0, 1[$.

(a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $M \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \Phi_M(f)(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque les fonctions f *et* $\Phi_M(f)$ *sont* 1*-périodiques, on a* $\|f-\Phi_M(f)\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1[} \big(f(x)-\Phi_M(f)(x)\big)$.

Soit $\varepsilon > 0$*. D'après la question 3, on peut trouver un « module d'uniforme continuité »* $\delta > 0$ *tel que* $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$*. On peut ensuite trouver* $M \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\dfrac{1}{M} \leqslant \delta$.

Soit $x \in [0, 1[$*. Soit* $j = \lfloor Mx \rfloor \in [\![0, M - 1]\!]$*, de sorte que* $x \in \left[\dfrac{j}{M}, \dfrac{j+1}{M}\right[$.

On a $\Phi_M(f)(x) = f\left(\dfrac{j}{M}\right)$*, donc le fait que* $\left|x - \dfrac{j}{M}\right| \leqslant \delta$ *entraîne*

$$|f(x) - \Phi_M(f)(x)| \leqslant \left|f(x) - f\left(\frac{j}{M}\right)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Cela montre $\|f - \Phi_M(f)\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1[} \big(f(x) - \Phi_M(f)(x)\big) \leqslant \varepsilon$.

(b) On suppose ξ équirépartie. Montrer

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 f(y)\,dy. \qquad (\star)$$

*Notons (provisoirement, puisqu'*in fine *on aura* $\mathcal{F} = \mathcal{C}_{\text{pér}}$*)* $\mathcal{F}$ *l'ensemble des fonctions de* $\mathcal{C}_{\text{pér}}$ *pour lesquelles la convergence de l'énoncé est vraie.*

- *Notamment par linéarité de la somme et de la limite, il est clair que* $\mathcal{F}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}_{\text{pér}}$.
- *Supposons qu'une fonction* $\psi \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ *vérifie* $\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{F} : \|\psi - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$ *et montrons que dans ce cas* $\psi \in \mathcal{F}$*. (Dans le vocabulaire topologique de deuxième année, on dira que* $\mathcal{F}$ *est* fermé pour la norme uniforme*).*

  Le point clef est donné par les deux contrôles uniformes suivants (le premier est évident par inégalité triangulaire, le second fait partie du cours) :

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{C}_{\text{pér}}, \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varphi(\xi_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \psi(\xi_n)\right| \leqslant \|\varphi - \psi\|_\infty \text{ et } \left|\int_0^1 \varphi - \int_0^1 \psi\right| \leqslant \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

En effet, soit $\psi \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ telle que $\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{F} : \|\psi - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\varphi \in \mathcal{F}$ comme dans l'assertion quantifiée. On a alors

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi(\xi_n) - \int_0^1 \psi\right| \leqslant \underbrace{\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi(\xi_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi(\xi_n)\right|}_{\leqslant \varepsilon} + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi(\xi_n) - \int_0^1 \varphi\right| + \underbrace{\left|\int_0^1 \varphi - \int_0^1 \psi\right|}_{\leqslant \varepsilon}.$$

Comme $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\varphi(\xi_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi$, on en déduit que

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\psi(\xi_n) - \int_0^1 \psi\right| \leqslant 3\varepsilon \quad \text{à partir d'un certain rang,}$$

ce qui montre que $\psi \in \mathcal{F}$.

Ces deux remarques structurelles concluent, comme on va le montrer.

- *Pour toute partie $Y \subseteq [0,1[$, notons $\widetilde{\mathbb{1}}_Y$ la fonction 1-périodique coïncidant avec $\mathbb{1}_Y$ sur $[0,1[$. Pour une telle partie Y et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la chaîne d'équivalences*

  $$\xi_n - \lfloor \xi_n \rfloor \in Y \Leftrightarrow \mathbb{1}_Y(\xi_n - \lfloor \xi_n \rfloor) = 1 \Leftrightarrow \widetilde{\mathbb{1}}_Y(\xi_n - \lfloor \xi_n \rfloor) = 1 \Leftrightarrow \widetilde{\mathbb{1}}_Y(\xi_n) = 1,$$

  si bien que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, si l'on suppose que Y est en outre un intervalle (afin que $\mathbb{1}_Y$, et donc $\widetilde{\mathbb{1}}_Y$, soient continues par morceaux), dont on notera $\ell(Y)$ la longueur, on a

  $$\gamma_N(\xi, Y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\mathbb{1}}_Y(\xi_n) \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \widetilde{\mathbb{1}}_Y = \int_0^1 \mathbb{1}_Y = \ell(Y).$$

  Ainsi, d'après la première question de cette partie, l'équirépartition de la suite ξ entraîne (et est même équivalente) au fait que $\widetilde{\mathbb{1}}_Y \in \mathcal{F}$, pour tout intervalle $Y = [a,b[\subseteq [0,1]$.
- *Comme $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel, on en déduit que toute combinaison linéaire de fonctions de la forme $\widetilde{\mathbb{1}}_Y$, où Y est un intervalle du type $[a,b[$ inclus dans $[0,1]$ appartient à $\mathcal{F}$.*

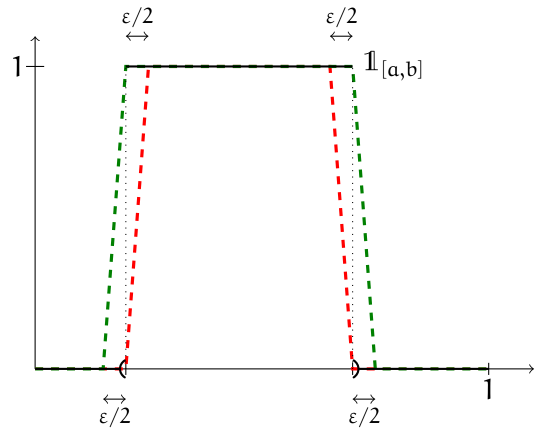
  C'est notamment le cas de toute fonction de la forme $\Phi_M(f)$, pour toute $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ et tout $M \in \mathbb{N}^*$.
- *La fermeture de $\mathcal{F}$ pour la norme uniforme entraîne alors que toute fonction de $\mathcal{C}_{\text{pér}}$ appartient à $\mathcal{F}$, ce qui conclut.*

10. On se propose de montrer la réciproque de la question précédente. On suppose que ξ vérifie la condition $(\star)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$. Soit $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

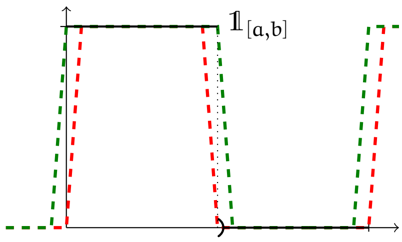
    (a) Étant donné $\varepsilon > 0$, en vous aidant d'un dessin, construire des fonctions f_ε^- et $f_\varepsilon^+ \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ telles que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait

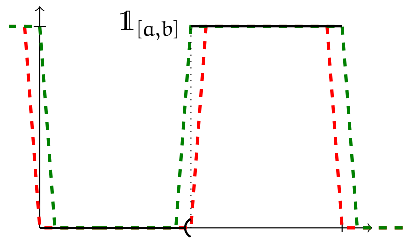
    $$f_\varepsilon^-(x) \leqslant \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \leqslant f_\varepsilon^+(x) \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \left(f_\varepsilon^+ - f_\varepsilon^-\right) \leqslant \varepsilon.$$

    Dans le cas « générique » où $0 < a < b < 1$, on peut avoir $0 < a-\varepsilon < a+\varepsilon < b-\varepsilon < b+\varepsilon < 1$ en réduisant ε si nécessaire, et le dessin suivant construit les fonctions périodiques voulues (qui ne sont pour le moment que des fonctions continues définies sur le segment $[0,1]$, et possédant la même valeur en 0 et en 1, si bien qu'elles se prolongement immédiatement en des éléments de $\mathcal{C}_{\text{pér}}$).



Si $a = 0$ et $b = 1$, on peut naturellement prendre $f_\varepsilon^\pm = 1$.
Dans les deux autres cas, il suffit de « décaler » un peu le dessin précédent (modulo 1).





(b) En déduire que la suite ξ est équirépartie.

Soit $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ et $\varepsilon > 0$. Soit $f_\varepsilon^\pm$ comme dans la question précédente. On a alors notamment que $\int_0^1 f_\varepsilon^\pm$ est ε-proche de $\int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b]} = b - a$. Par ailleurs, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a, d'après les inégalités entre fonctions

$$\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^-(\xi_n)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{}\int_0^1 f_\varepsilon^- \geqslant b-a-\varepsilon} \leqslant \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{[a,b]}(\xi_n)}_{=\gamma_N(\xi,[a,b])} \leqslant \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\varepsilon^+(\xi_n)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{}\int_0^1 f_\varepsilon^+ \leqslant b-a+\varepsilon},$$

ce qui montre que $b - a - 2\varepsilon \leqslant \gamma_N(\xi, [a, b]) \leqslant b - a + 2\varepsilon$ à partir d'un certain rang, et donc que $\gamma_N(\xi, [a, b]) \xrightarrow[N\to+\infty]{} b - a$, ce qui conclut.

11. On suppose que ξ vérifie $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e_k(\xi_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Montrer que la suite ξ est équirépartie.

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ telles que $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 f$. L'hypothèse de l'énoncé est que, pour tout k non nul, $e_k \in \mathcal{V}$, car $\int_0^1 e_k = 0$ dans ce cas.

Comme par ailleurs, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e_0(\xi_n) = 1 = \int_0^1 e_0$, on en déduit que toutes les fonctions de la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ appartiennent en fait à $\mathcal{V}$.

- *Il est clair que $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{\text{pér}}$. On en déduit que $\text{Vect}(e_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{V}$.*
- *Soit maintenant $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$. D'après le théorème de Fejér, on a $\|\Sigma_m[f] - f\|_\infty \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$. Le point précédent montre par ailleurs que $\forall m \in \mathbb{N}^*, \Sigma_m[f] \in \mathcal{V}$.*
  Soit $\varepsilon > 0$.

- *On peut trouver* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\|\Sigma_m[f] - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. *Notons* $g = \Sigma_m[f]$ *pour plus de simplicité. Cela entraîne en particulier que* $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(\xi_n) \right| \leqslant \varepsilon$ *(par inégalité triangulaire) et* $\left| \int_0^1 f - \int_0^1 g \right| \leqslant \varepsilon$ *(par contrôle uniforme de l'intégrale).*
- *Par ailleurs,* $g \in \mathcal{V}$, *donc* $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(\xi_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 g$.

En rassemblant ces différents contrôles, on obtient

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) - \int_0^1 f \right| \leqslant \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(\xi_n) \right| + \underbrace{\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(\xi_n) - \int_0^1 g \right|}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} + \left| \int_0^1 f - \int_0^1 g \right|$$

$$\leqslant 3\varepsilon \qquad \text{à partir d'un certain rang,}$$

ce qui montre que $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 f$.

(Remarquons qu'on a essentiellement montré, là aussi, que $\mathcal{V}$ *était fermé pour la norme uniforme : dans ce contexte, le théorème de Fejér est un résultat de densité de l'ensemble des polynômes trigonométriques dans* $\mathcal{C}_{\text{pér}}$, *et c'est lui qui est la clef de cette démonstration).*

On a donc montré que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ *vérifiait* $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 f$, *ce qui entraîne que la suite* ξ *est équirépartie d'après la question précédente.*

12. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(\alpha n + x)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie.

L'irrationalité de α *va nous permettre d'utiliser la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique de raison* $e_k(\alpha) = e^{i\,2\pi k\,\alpha}$, *car* $k\,\alpha \notin \mathbb{Z}$, *donc* $e_k(\alpha) \neq 1$.
Soit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Pour tout* $N \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(\alpha n + x) = \frac{e_k(\alpha + x)}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e_k(\alpha)^m = \frac{e_k(\alpha + x)}{N} \frac{1 - e_k(\alpha)^N}{1 - e_k(\alpha)} = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

ce qui montre que $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(\alpha n + x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Partie IV. Théorème de Weyl (1916).

Le but de cette partie est de démontrer le théorème d'Hermann Weyl (1885-1955) qui affirme que pour tout polynôme de degré $d \geqslant 1$ à coefficients réels $P = \alpha_d X^d + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\alpha_d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la suite de nombres réels $(P(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie.

13. **Inégalité de Cauchy-Schwarz.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_N), (b_1, \ldots, b_N) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

En étudiant le discriminant du polynôme $\sum_{n=1}^{N} (|a_n| - |b_n|\, X)^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, montrer

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n\, b_n \right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Le polynôme donné dans l'énoncé s'écrit $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 - 2\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|\,|b_n|\right) X + \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2\right) X^2$.
Il ne prend par ailleurs que des valeurs positives dans $\mathbb{R}$ *(c'est une somme de carrés), donc son discriminant est négatif, ce qui montre après simplification :*

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|\,|b_n|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2\right).$$

En appliquant de part et d'autre la fonction croissante $t \mapsto \sqrt{t}$, *il vient (tout est positif) :*

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|\,|b_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2\right)^{1/2}.$$

On en déduit l'inégalité demandée car, en vertu de l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\, b_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |a_n\, b_n| = \sum_{n=1}^{N} |a_n|\,|b_n|.$$

14. **Inégalité de van der Corput.** Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |z_n| \leqslant 1$.
Soit $1 \leqslant H \leqslant N$.

(a) Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{H}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right| \leqslant H+1$.

On a, pour tout $h \in [\![1, H]\!]$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} z_n - \sum_{n=1}^{N} z_{n+k} &= \sum_{n=1}^{N} z_n - \sum_{m=1+h}^{N+h} z_m \\ &= \sum_{n=1}^{h} z_n - \sum_{n=N+1}^{N+h} z_n\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{N} z_n - \sum_{n=1}^{N} z_{n+k} r\right| \leqslant 2h$ *d'après l'inégalité triangulaire.*

En utilisant une fois encore l'inégalité triangulaire, on en déduit

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{H}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right| &= \left|\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\left(\sum_{n=1}^{N} z_n - \sum_{n=1}^{N} z_{n+k}\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\left|\sum_{n=1}^{N} z_n - \sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H} 2h = H+1.\end{aligned}$$

(b) Montrer que $\displaystyle\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right| \leqslant \frac{1}{N^{1/2}}\frac{1}{H}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2\right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}$.

On a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n\right| &\leqslant \left|\frac{1}{HN}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{HN}\sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right| && \textit{(inégalité triangulaire)}\\
&\leqslant \frac{1}{HN}\left|\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right)\times 1\right| + \frac{H+1}{N} && \textit{(question précédente)}\\
&\leqslant \frac{1}{HN}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2\right)^{1/2} \times \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N}|1|^2\right)^{1/2}}_{=\sqrt{N}} + \frac{H+1}{N} && \textit{(Cauchy-Schwarz)}\\
&\leqslant \frac{1}{N^{1/2}}\frac{1}{H}\left(\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2\right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.
\end{aligned}$$

(c)[++] En écrivant

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{1\leqslant h,h'\leqslant H} z_{n+h}\,\overline{z_{n+h'}} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{h=1}^{H}|z_{n+h}|^2 + 2\ \text{Ré}\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{1\leqslant h'<h\leqslant H} z_{n+h}\,\overline{z_{n+h'}}\right)$$

et en effectuant un changement de variables approprié, montrer que

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{h=1}^{H} z_{n+h}\right|^2 \leqslant NH + 2H\sum_{h=1}^{H}\left|\sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\,\overline{z_n}\right| + H^2\,(H+1).$$

Cette question était vraiment très difficile. Voici une rédaction possible.

Le point crucial est d'estimer $S = \sum_{n=1}^{N}\sum_{1\leqslant h'<h\leqslant H} z_{n+h}\,\overline{z_{n+h'}}$.

On va effectuer un changement de variables $(m,k) = (n+h', h-h')$. *Autrement dit, on va rassembler, parmi les termes apparaissant dans la somme* S *les termes de la forme* $z_{m+k}\,\overline{z_m}$, *pour un certain entier* $m \in [\![1,N]\!]$ *et un certain entier* $k \in [\![1,H]\!]$.

Dans la situation « générique », un couple (m,k) *va apparaître* $H-k$ *fois*[1] *dans la somme triple définissant* S, *pour les triplets* (n,h',h) *suivants :*

$$(m-1,1,1+k),(m-2,2,2+k),\cdots(m-(H-k),H-k,H).$$

On va donc à peu près avoir

$$S = \sum_{n=1}^{N}\sum_{1\leqslant h'<h\leqslant H} z_{n+h}\,\overline{z_{n+h'}} \approx \sum_{k=1}^{H}(H-k)\sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\,\overline{z_m} = S'. \qquad (\approx)$$

Remarquons (cela nous simplifiera la vie dans un instant) qu'en se rappelant que le facteur $(H-k)$ *compte un certain nombre de termes qui ont été rassemblés, ces deux sommes possèdent le même nombre de termes, à savoir*

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{1\leqslant h'<h\leqslant H} 1 = \sum_{k=1}^{H}(H-k)\sum_{m=1}^{N} 1 = N\,\frac{H(H-1)}{2}.$$

L'égalité $(\approx)$ *n'est cependant qu'approximative, car notre discussion a négligé deux phénomènes :*

1. Notons que, notamment, le cas $k = H$ n'apparaît en fait pas, mais on va le laisser dans la somme pour tomber sur la formule de l'énoncé.

- *d'abord, les triplets* (n, h', h) *possédant une première coordonnée trop grande (précisément, ceux tels que* $n + h' > N$*) ne vont pas définir des couples* $(m, k) = (n + h', h - h')$ *tels que* $m \leqslant N$ *: ce sont des termes qui vont figurer dans* S*, mais pas dans* S' *;*
- *à l'inverse, les couples* (m, k) *possédant une première coordonnée trop petite (précisément, ceux tels que* $m \leqslant H - k$*) vont correspondre à moins de* $H - k$ *triplets, car les* $H - k - m + 1$ *triplets entre* $(0, m, m + k)$ *et* $(m - (H - k), H - k, H)$ *possèdent une première coordonnée* $\leqslant 0$ *: ce sont des termes qui vont figurer dans* S'*, mais pas dans* S*.*

La remarque que nous avons faite montre que ces deux phénomènes concernent un même nombre de termes, à savoir :

$$\mathcal{N}_{\text{erreurs}} = \left| \left\{ (n, h', h) \in [\![1, N]\!] \times [\![1, H]\!]^2 \,\middle|\, h' < h \text{ et } n + h' > N \right\} \right| = \sum_{k=1}^{H-1} \sum_{m=1}^{H-k} (H - k - m + 1).$$

On peut par exemple calculer la somme (le dénombrement de l'ensemble de gauche se fait en fait de la même façon, par exemple en distinguant les cas suivant les valeurs pertinentes de n*, de* $n = N - H + 2$ *à* $n = N$*) :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{\text{erreurs}} &= \sum_{k=1}^{H-1} \sum_{m=1}^{H-k} (H - k - m + 1) \\
&= \sum_{k=1}^{H-1} \sum_{p=1}^{H-k} p && \begin{bmatrix} p = H - k + 1 - m \\ m = H - k + 1 - p \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{H-1} \frac{(H - k)(H - k + 1)}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{H-1} \binom{H - k + 1}{2} \\
&= \sum_{\ell=2}^{H-k} \binom{\ell}{2} && \begin{bmatrix} \ell = H - k + 1 \\ k = H - \ell + 1 \end{bmatrix} \\
&= \binom{H - k + 1}{3} = \frac{(H + 1)H(H - 1)}{6}. && \textit{(sommation de l'indice du haut)}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a en vérité l'égalité

$$S = S' + E_+ - E_-,$$

avec les deux termes d'erreurs (à $\mathcal{N}_{\text{erreurs}}$ *termes, tous de module* $\leqslant 1$*) :*

$$E_+ = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant N \\ 1 \leqslant h' < h \leqslant H \\ n + h' > N}} z_{n+h} \, \overline{z_{n+h'}} \qquad \textit{et} \qquad E_- = \sum_{k=1}^{H-1} \sum_{m=1}^{H-k} (H - k - m + 1) z_{m+k} \, \overline{z_m}.$$

On peut maintenant conclure : d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\text{Ré}(S) \leqslant |S| \leqslant \left|S'\right| + |E_+| + |E_-| \\
&\leqslant \left| \sum_{k=1}^{H} (H - k) \sum_{m=1}^{N} z_{m+k} \, \overline{z_m} \right| + 2\, \mathcal{N}_{\text{erreurs}} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{H} \underbrace{(H - k)}_{\leqslant H} \left| \sum_{m=1}^{N} z_{m+k} \, \overline{z_m} \right| + \frac{(H + 1)H(H - 1)}{3}
\end{aligned}$$

$$\leqslant H \sum_{k=1}^{H} \left| \sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\, \overline{z_m} \right| + \frac{(H+1)H(H-1)}{3}$$

Ainsi, toujours d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=1}^{H} |z_{n+h}|^2 + 2\,\text{Ré}(S) &\leqslant NH + 2H \sum_{k=1}^{H} \left| \sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\, \overline{z_m} \right| + \frac{2}{3}(H+1)H(H-1) \\ &\leqslant NH + 2H \sum_{k=1}^{H} \left| \sum_{m=1}^{N} z_{m+k}\, \overline{z_m} \right| + H^2(H+1),\end{aligned}$$

ce qui conclut.

(d) En déduire que

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_n \right| \leqslant \sqrt{2} \left(\frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\, \overline{z_n} \right| \right)^{1/2} + \frac{1}{H^{1/2}} + \left(\frac{H+1}{N} \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.$$

On va utiliser l'inégalité $\sqrt{a+b+c} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$*, valable pour tous* $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ *(comme on le voit en élevant en carré de part et d'autre).*
D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_n \right| &\leqslant \frac{1}{N^{1/2}} \frac{1}{H} \left(\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N} \\ &= \frac{1}{N^{1/2}} \frac{1}{H} \left(NH + 2H \sum_{h=1}^{H} \left| \sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\, \overline{z_n} \right| + H^2\,(H+1) \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N} \\ &= \frac{(NH)^{1/2}}{N^{1/2}H} + \frac{\sqrt{2}H^{1/2}}{N^{1/2}H} \left(\sum_{h=1}^{H} \left| \sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\, \overline{z_n} \right| \right)^{1/2} + \frac{(H^2\,(H+1))^{1/2}}{N^{1/2}H} + \frac{H+1}{N} \\ &= \frac{1}{H^{1/2}} + \sqrt{2} \left(\frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\, \overline{z_n} \right| \right)^{1/2} + \left(\frac{H+1}{N} \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.\end{aligned}$$

15. **Lemme de van der Corput.** Soit $\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels tels que, pour tout entier $h \in \mathbb{N}^*$, la suite de nombres réels $\left(\xi_{n+h} - \xi_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie.
Montrer que ξ est équirépartie.

Soit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *et* $\varepsilon > 0$*. On peut trouver* $H \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\dfrac{1}{H^{1/2}} \leqslant \varepsilon$*.*
Pour tous $h, n \in \mathbb{N}^*$*, on a* $e_k(\xi_{n+k} - \xi_n) = e_k(\xi_{n+h})\, \overline{e_k(\xi_n)}$*. Ainsi, pour tout* $h \in \mathbb{N}^*$*, l'hypothèse d'équirépartition de la suite* $(\xi_{n+h} - \xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *entraîne que* $\displaystyle\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(\xi_{n+h})\, \overline{e_k(\xi_n)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$*. On en déduit, par linéarité, que* $\displaystyle\frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(\xi_{n+h})\, \overline{e_k(\xi_n)} \right| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$*.*
Ainsi,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(\xi_n) \right| = \underbrace{\frac{1}{H^{1/2}}}_{\leqslant \varepsilon} + \underbrace{\sqrt{2} \left(\frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e_k(\xi_{n+h})\, \overline{e_k(\xi_n)} \right| \right)^{1/2} + \left(\frac{H+1}{N} \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0}$$

$\leqslant 2\varepsilon$ *à partir d'un certain rang.*

On a donc montré $\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} e_k(\xi_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$*, ce qui montre l'équirépartition de* ξ*, et conclut la démonstration du lemme de van der Corput.*

16. Démontrer le théorème de Weyl en raisonnant par récurrence sur le degré $d \geqslant 1$.

Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$*, on note* $W(d)$ *l'assertion « pour tout polynôme* P *de degré* d *et de coefficient dominant irrationnel, la suite* $(P(n))_{n\in\mathbb{N}*}$ *est équirépartie. » Montrons* $\forall d \in \mathbb{N}^*, W(d)$ *par récurrence.*

Initialisation. *L'assertion* $W(1)$ *a été montrée à la question 12.*

Hérédité. *Soit* $d \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $W(d)$*. Montrons* $W(d+1)$*.*

Soit $P = \alpha_{d+1}X^{d+1} + \alpha_d X^d + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $\alpha_{d+1} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$*.*

Soit $h \in \mathbb{N}^*$*. L'opérateur (clairement linéaire) aux différences finies*

$$\Delta_h : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to & \mathbb{R}[X] \\ \quad P \quad \mapsto & P(X+h) - P(x) \end{cases}$$

vérifie $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Delta_h(X^k) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} h^{k-\ell} X^\ell$*, donc* $\forall k \in \mathbb{N}^*, \deg \Delta_h(X^k) = k-1$ *(et* $\Delta_h(1) = 0$*).*

On en déduit facilement et classiquement que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ *non constant de terme dominant* βX^δ*, le polynôme* $\Delta_h(Q)$ *a pour terme dominant* $\beta\,\delta\,h\,X^{\delta-1}$*.*

En particulier, $\Delta_h(P)$ *a pour terme dominant* $\underbrace{\alpha_{d+1}\,(d+1)\,h}_{\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} X^d$*. D'après* $W(d)$*, on en déduit que la suite* $\big(\Delta_h(P)(n)\big)_{n\in\mathbb{N}*} = (P(n+h) - P(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est équirépartie.*

Cela étant valable pour tout $h \in \mathbb{N}^*$*, le lemme de van der Corput entraîne que* $(P(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est équirépartie, ce qui montre* $W(d+1)$ *et clôt la récurrence.*