DM 22 : théorème de Fejér et équirépartition

Ce DM est essentiellement un (large) extrait d'un sujet de concours récent (ÉNS MP 2017, maths C).

- On note $\mathcal{C}_{\text{pér}}$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 1-périodiques.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note e_k la fonction $x \mapsto \exp\big(i\,2\pi\,k\,x\big)$, qui est un élément de $\mathcal{C}_{\text{pér}}$.
- Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$, on définit le k-*ième coefficient de Fourier*

$$c_k(f) = \int_0^1 f(y)\, e_{-k}(y)\, dy \in \mathbb{C}.$$

- Enfin, pour $n, N \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$, on définit les fonctions $S_n[f]$ et $\Sigma_N[f]$ par

$$S_n[f] = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k \qquad \text{et} \qquad \Sigma_N[f] = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f).$$

Partie I. Préliminaires.

1. Soit $f \in C^0([0,1];\mathbb{C})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On définit $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\widetilde{f} : x \mapsto f\big(x - \lfloor x \rfloor\big)$. Montrer $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$.
2. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ est bornée.

On notera $\|f\|_\infty = \sup\big\{\big|f(x)\big| \;\big|\; x \in \mathbb{R}\big\}$ la norme uniforme d'un élément $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$.

3. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Partie II. Théorème de Fejér.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit le *noyau de Fejér* $K_N \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ par

$$K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=-n}^{n} e_k.$$

4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 K_N(y)\, dy = 1$.
5. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Montrer que

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin\big((N+1)\pi x\big)}{\sin(\pi x)} \right)^2.$$

6. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\Sigma_n[f](x) = \displaystyle\int_0^1 f(y)\, K_N(x-y)\, dy$.
   (b) En déduire que $\Sigma_n[f](x) - f(x) = \displaystyle\int_0^1 \big(f(x-y) - f(x)\big)\, K_N(y)\, dy$.
7. **Théorème de Fejér.** Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^\delta |f(x-y) - f(x)|\, K_N(y)\, dy \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_{1-\delta}^1 |f(x-y) - f(x)|\, K_N(y)\, dy \leqslant \varepsilon.$$

   (b) Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $\kappa_{\delta,f} > 0$ (qui dépend de δ et de f) telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)|\, K_N(y)\, dy \leqslant \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}.$$

   (c) En déduire que la suite de fonctions $\big(\Sigma_N[f]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, c'est-à-dire que $\big\|\Sigma_N[f] - f\big\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Partie III. Équirépartition modulo 1.

Soit $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.

- Pour toute partie $Y \subseteq [0,1]$ et tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, on notera

$$\gamma_N(\xi, Y) = \frac{1}{N}\left|\left\{n \in [\![1,N]\!] \,\middle|\, \xi_n - \lfloor \xi_n \rfloor \in Y\right\}\right|.$$

- La suite ξ est dite *équirépartie modulo* 1, ou, en abrégé, *équirépartie*, si, pour tous $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on a

$$\gamma_N\left(\xi, \left[a,b\right]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a.$$

8. Montrer que la suite ξ est équirépartie si et seulement si, pour tous $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on a $\gamma_N\left(\xi, \left[a,b\right[\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$.
9. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$. Pour tout entier $M \in \mathbb{N}^*$, on notera $\Phi_M(f)$ la fonction 1-périodique coïncidant avec

$$\sum_{j=0}^{M-1} f\left(\frac{j}{M}\right) \mathbb{1}_{\left[\frac{j}{M}, \frac{j+1}{M}\right[}$$

sur l'intervalle $[0,1[$.

   (a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $M \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - \Phi_M(f)(x)| \leqslant \varepsilon.$$

   (b) On suppose ξ équirépartie. Montrer

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 f(y)\,dy. \qquad (\star)$$

10. On se propose de montrer la réciproque de la question précédente. On suppose que ξ vérifie la condition $(\star)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$. Soit $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

   (a) Étant donné $\varepsilon > 0$, en vous aidant d'un dessin, construire des fonctions f_ε^- et $f_\varepsilon^+ \in \mathcal{C}_{\text{pér}}$ telles que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait

$$f_\varepsilon^-(x) \leqslant \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \leqslant f_\varepsilon^+(x) \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \left(f_\varepsilon^+ - f_\varepsilon^-\right) \leqslant \varepsilon.$$

   (b) En déduire que la suite ξ est équirépartie.

11. On suppose que ξ vérifie $\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} e_k(\xi_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

    Montrer que la suite ξ est équirépartie.
12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(\alpha n + x\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie.

Partie IV. Théorème de Weyl (1916).

Cette partie est (belle,) difficile et technique, et le DM est déjà long. Considérez-la comme très facultative !

> Le but de cette partie est de démontrer le théorème d'Hermann Weyl (1885-1955) qui affirme que pour tout polynôme de degré $d \geqslant 1$ à coefficients réels $P = \alpha_d X^d + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\alpha_d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la suite de nombres réels $\big(P(n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie.

13. **Inégalité de Cauchy-Schwarz.** Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_N), (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

    En étudiant le discriminant du polynôme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \big(|a_n| - |b_n|\, X\big)^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, montrer

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n\, b_n \right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

14. **Inégalité de van der Corput.** Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |z_n| \leqslant 1$.
    Soit $1 \leqslant H \leqslant N$.

    (a) Montrer que $\displaystyle\left| \sum_{n=1}^{N} z_n - \frac{1}{H} \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right| \leqslant H + 1.$

    (b) Montrer que $\displaystyle\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_n \right| \leqslant \frac{1}{N^{1/2}} \frac{1}{H} \left(\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.$

    (c)$^{++}$ En écrivant

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{1 \leqslant h, h' \leqslant H} z_{n+h}\, \overline{z_{n+h'}} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{h=1}^{H} |z_{n+h}|^2 + 2\ \mathrm{R\acute{e}} \left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{1 \leqslant h' < h \leqslant H} z_{n+h}\, \overline{z_{n+h'}} \right)$$

    et en effectuant un changement de variables approprié, montrer que

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=1}^{H} z_{n+h} \right|^2 \leqslant N H + 2H \sum_{h=1}^{H} \left| \sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\, \overline{z_n} \right| + H^2 (H+1).$$

    (d) En déduire que

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_n \right| \leqslant \sqrt{2} \left(\frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z_{n+h}\, \overline{z_n} \right| \right)^{1/2} + \frac{1}{H^{1/2}} + \left(\frac{H+1}{N} \right)^{1/2} + \frac{H+1}{N}.$$

15. **Lemme de van der Corput.** Soit $\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels tels que, pour tout entier $h \in \mathbb{N}^*$, la suite de nombres réels $\big(\xi_{n+h} - \xi_n\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie.
    Montrer que ξ est équirépartie.
16. Démontrer le théorème de Weyl en raisonnant par récurrence sur le degré $d \geqslant 1$.