Troisième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n.$$

Déterminer l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence est $X^2 - 2X - 3$*, dont les racines sont* 3 *et* -1*.*

On sait donc qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha\, 3^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'examen des deux premiers termes donne alors $\alpha + \beta = 3\alpha - \beta = 1$*, d'où l'on tire rapidement* $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{3^n + (-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

On définit la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\mathrm{sh}(x)}. \end{cases}$$

1. Montrer que f est deux fois dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$.

   La fonction f *est deux fois dérivable, en tant que composée de fonctions deux fois dérivables.*
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$*, on a*

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{ch}(x)\, e^{\mathrm{sh}(x)} \\ f''(x) &= \mathrm{sh}(x)\, e^{\mathrm{sh}(x)} + \mathrm{ch}^2(x)\, e^{\mathrm{sh}(x)} = (\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}^2(x))\, e^{\mathrm{sh}(x)}. \end{aligned}$$

   Comme $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$*, on a* $\mathrm{ch}^2(x) \geqslant \mathrm{ch}(x)$ *et donc* $\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}^2(x) \geqslant \mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}(x) = e^x > 0$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant x + 1$.

   Par opérations, la fonction $g : x \mapsto f(x) - (x + 1)$ *est deux fois dérivable, de dérivées* $g' = f' - 1$ *et* $g'' = f''$.
   Le fait que $g(0) = g'(0) = 0$ *permet alors rapidement de dresser le tableau de variations ci-contre.*
   On obtient donc en particulier $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geqslant 0$*, ce qui conclut.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g''			$+$		
g'	?	↗	0	↗	?
g	?	↘	0	↗	?

3. Sans faire de nouveau calcul de dérivée, montrer $\forall x \in \,]-\infty, 1[\,, f(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

   Soit $x \in \,]-\infty, 1[$.
   On a, d'après la question précédente (appliquée à $-x$*),* $\dfrac{1}{e^{\operatorname{sh}(x)}} = e^{-\operatorname{sh}(x)} = e^{\operatorname{sh}(-x)} \geqslant 1 - x$.
   Puisque $x < 1$*, tous les termes apparaissant dans cette inégalité sont* > 0 *donc, par décroissance de la fonction inverse sur* $\mathbb{R}_+^*$*, on en déduit*

$$e^{\operatorname{sh}(x)} \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

Problème. Matrices bistochastiques.

Dans tout le problème, $n \geqslant 3$ désigne un entier.

- On rappelle qu'étant donné $M \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ et $j \in [\![1, p]\!]$, la notation $C_j(M)$ désigne la j-ième colonne de M, vue comme vecteur de $\mathbb{C}^n$.
- Étant donné $M \in M_n(\mathbb{R})$, on notera $M \geqslant 0$ si $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $[M]_{i,j} \geqslant 0$.
- Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *bistochastique* si tous ses éléments sont $\geqslant 0$, et si la somme des éléments de chacune de ses lignes et de chacune de ses colonnes vaut 1. On note alors

$$\mathcal{B}_n = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; M \geqslant 0 \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{\ell,k} = 1 \right\}$$

  l'ensemble de ces matrices.
- On note Σ_n l'ensemble des bijections $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$.
  Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, on note P_σ et on appelle *matrice de permutation associée à* σ la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient (i, j) vaut 1 si $i = \sigma(j)$, et 0 sinon. Ainsi, $P_\sigma = \left(\mathbb{1}_{(i=\sigma(j))}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
- On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs de la base canonique.
- On note également $u = e_1 + \cdots + e_n$ le vecteur dont tous les coefficients valent 1.
- Étant donné un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, on note $\|X\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

Partie I. Généralités.

1. **Matrices de permutation.**
   (a) Soit $\sigma \in \Sigma_n$ et $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer $P_\sigma \, e_j = e_{\sigma(j)}$.

   Soit $i \in [\![1, n]\!]$. *On a*

$$\begin{aligned}
[P_\sigma \, e_j]_{i,1} &= \sum_{k=1}^{n} [P_\sigma]_{i,k} \underbrace{[e_j]_{k,1}}_{=\mathbb{1}_{(j=k)}} \\
&= [P_\sigma]_{i,j} \\
&= \mathbb{1}_{(i=\sigma(j))}.
\end{aligned}$$

   Autrement dit, le vecteur colonne $P_\sigma \, e_j$ *a sa* $\sigma(j)$*-ième coordonnée qui vaut* 1*, et les autres* 0*, c'est-à-dire que* $P_\sigma \, e_j = e_{\sigma(j)}$.

(b) Soit $\sigma, \tau \in \Sigma_n$. Montrer $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. *On a d'après la question précédente*

$$P_\sigma P_\tau e_j = P_\sigma e_{\tau(j)} = e_{\sigma(\tau(j))} = P_{\sigma\circ\tau} e_j.$$

Autrement dit, $C_j(P_\sigma P_\tau) = C_j(P_{\sigma\circ\tau})$.
Comme cela est vrai pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, *on a* $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$.

(c) Soit $\sigma \in \Sigma_n$. Montrer que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_\sigma^T$.

- *D'après la question précédente, on a* $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma^{-1}} P_\sigma = P_{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}} = I_n$, *ce qui montre que* P_σ *est inversible, d'inverse* P_σ^{-1}.
- *Il reste à montrer que* $P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^T$. *Soit* $i, j \in [\![1, n]\!]$.
  On a $[P_{\sigma^{-1}}]_{i,j} = \mathbb{1}_{(i=\sigma^{-1}(j))}$ *et* $[P_\sigma^T]_{i,j} = [P_\sigma]_{j,i} = \mathbb{1}_{(j=\sigma(i))}$.
  Les conditions $i = \sigma^{-1}(j)$ *et* $j = \sigma(i)$ *étant équivalentes, ces deux coefficients sont bien égaux.*

2. **Une première caractérisation des matrices bistochastiques.**

(a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{B}_n$ si et seulement si $M \geqslant 0$ et $Mu = M^T u = u$.

Il suffit de remarquer que

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} [M]_{1,j} \\ \sum_{j=1}^{n} [M]_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} [M]_{n,j} \end{pmatrix} :$$

l'égalité $Mu = u$ *équivaut donc au fait que la somme des éléments de chaque ligne de* M *vaut* 1.
En appliquant ce fait à M^T, *on voit donc que l'égalité* $M^T u = u$ *équivaut au fait que la somme des éléments de chaque colonne de* M *vaut* 1.
Ainsi, on a bien $M \in \mathcal{B}_n \Leftrightarrow (M \geqslant 0$ *et* $Mu = M^T u = u)$.

(b) En déduire que $\mathcal{B}_n$ est stable par produit, c'est-à-dire que $\forall M, N \in \mathcal{B}_n, MN \in \mathcal{B}_n$.

Soit $M, N \in \mathcal{B}_n$.

- *Pour tous* $i, j \in [\![1, n]\!]$, *on a* $[MN]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{[M]_{i,k}}_{\geqslant 0} \underbrace{[N]_{k,j}}_{\geqslant 0} \geqslant 0$, *donc* $MN \geqslant 0$.
- *On a* $MNu = Mu = u$.
- *On a* $(MN)^T u = N^T M^T u = N^T u = u$.

À l'aide de la question précédente, cela montre que $MN \in \mathcal{B}_n$.

3. Donner un exemple de matrice non inversible appartenant à $\mathcal{B}_n$.

La matrice $J = \dfrac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ *est clairement bistochastique.*
Le vecteur $e_1 - e_2$ *appartient à* $\ker(J)$, *ce qui prouve que* J *n'est pas inversible.*

4. **Matrices bistochastiques inversibles.** Soit $M \in \mathcal{B}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $M^{-1} \in \mathcal{B}_n$ si et seulement si $M^{-1} \geqslant 0$.

   Puisque M *est inversible,* M^T *l'est aussi, et on sait que son inverse est* $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.
   En multipliant à gauche l'égalité $Mu = u$ *(resp.* $M^T u = u$*) par l'inverse de* M *(resp.* M^T*), on obtient* $u = M^{-1}u$ *(resp.* $u = (M^{-1})^T u$*).*
   Cela montre que la matrice M^{-1} *possède automatiquement deux des trois propriétés caractérisant la bistochasticité.*
   On a donc $M^{-1} \in \mathcal{B}_n$ *si et seulement si* $M^{-1} \geqslant 0$.

   (b) Supposons $M^{-1} \in \mathcal{B}_n$. On va montrer qu'alors M est une matrice de permutation.

   i. En utilisant l'égalité $M^{-1}M = I_n$, montrer

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], [M]_{i,j} \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : C_i(M^{-1}) = \lambda e_j.$$

   Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $[M]_{i,j} \neq 0$.
   On souhaite montrer que la i*-ème colonne de* M^{-1} *est proportionnelle à* e_j*, c'est-à-dire que, pour tout* $k \neq j$, $[M^{-1}]_{k,i} = 0$.
   Soit donc $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$. *On a alors, en utilisant que les coefficients de* M *et de* M^{-1} *sont positifs :*

$$0 = [I_n]_{k,j} = \sum_{\ell=1}^{n} [M^{-1}]_{k,\ell}\,[M]_{\ell,j} \geqslant \underbrace{[M^{-1}]_{k,i}}_{\geqslant 0}\,\underbrace{[M]_{i,j}}_{>0} \qquad \textit{donc} \qquad [M^{-1}]_{k,i} = 0,$$

   ce qui conclut.

   ii. En déduire que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $[M]_{i,j} \neq 0$, et qu'on a alors $[M]_{i,j} = 1$.

   Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

   Existence. *S'il n'existait pas d'indice* $i \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $[M]_{i,j} \neq 0$*, la* j*-ième colonne de* M *serait nulle, ce qui contredit son inversibilité.*

   Unicité. *S'il existait* $i_0 \neq i_1 \in [\![1, n]\!]$ *tels que* $[M]_{i_0,j}$ *et* $[M]_{i_1,j}$ *soient non nuls, la question précédente entraînerait l'existence de* $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$C_{i_0}(M^{-1}) = \lambda_0 e_j \qquad \textit{et} \qquad C_{i_1}(M^{-1}) = \lambda_1 e_j.$$

   On en déduit $\lambda_1 C_{i_0}(M^{-1}) - \lambda_0 C_{i_1}(M^{-1}) = 0$*, c'est-à-dire* $M^{-1}\big(\lambda_1 e_{i_0} - \lambda_0 e_{i_1}\big) = 0$*, et on va voir que cela contredit l'inversibilité de* M^{-1}.

   - *Si* $\lambda_0 = 0$ *ou* $\lambda_1 = 0$, M^{-1} *a une colonne nulle, donc n'est pas inversible.*
   - *Si* $\lambda_0, \lambda_1 \neq 0$*, le vecteur* $\lambda_1 e_{i_0} - \lambda_0 e_{i_1}$ *n'est pas nul, donc* $\ker(M^{-1})$ *n'est pas réduit au vecteur nul, ce qui montre que* M^{-1} *n'est pas inversible.*

   Dans les deux cas, on a obtenu une contradiction, ce qui conclut.

   On a donc montré l'existence et l'unicité de $i \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $[M]_{i,j} \neq 0$.
   Comme M *est bistochastique et que* $[M]_{i,j}$ *est le seul coefficient non nul de* $C_j(M)$*, on a nécessairement* $[M]_{i,j} = 1$.

   iii. La question précédente montre que l'on peut trouver une fonction $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], [M]_{i,j} = \mathbb{1}_{(i=\sigma(j))}$. Montrer $\sigma \in \Sigma_n$, c'est-à-dire que σ est bijective.

   - *Montrons d'abord que* σ *est injective.*
     Soit $j_0, j_1 \in [\![1, n]\!]$ *tels que* $\sigma(j_0) = \sigma(j_1)$.
     On a donc $C_{j_0}(M) = C_{j_1(M)}$*, d'où* $M(e_{j_0} - e_{j_1}) = 0$.
     Comme M *est inversible, cela entraîne* $e_{j_0} - e_{j_1} = 0$*, et donc* $j_0 = j_1$.

- *Comme σ est une application de l'ensemble fini $[\![1, n]\!]$ dans lui-même, on en déduit qu'elle est bijective.*

5. **Propriétés spectrales des matrices bistochastiques.** Soit $M \in \mathcal{B}_n$.
   (a) Montrer que $M - I_n$ n'est pas inversible.

   On a $Mu = u$*, donc* $(M - I_n)u = 0$*. Cela montre que le noyau de* $M - I_n$ *n'est pas réduit au vecteur nul, et donc que* $M - I_n$ *n'est pas inversible.*

   (b) Montrer $\forall X \in \mathbb{C}^n, \|MX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$.

   Soit $X \in \mathbb{C}^n$ *et* $k \in [\![1, n]\!]$*. On a donc*

$$\begin{aligned}
|[MX]_{k,1}| &= \left| \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} [X]_{\ell,1} \right| \\
&\leqslant \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} \underbrace{|[X]_{\ell,1}|}_{\leqslant \|X\|_\infty} && \text{(in. triang. et } M \geqslant 0\text{)} \\
&\leqslant \left(\sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} \right) \|X\|_\infty \\
&\leqslant \|X\|_\infty. && \text{(car } M \in \mathcal{B}_n\text{)}
\end{aligned}$$

   (c) En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ de module > 1, la matrice $M - \lambda I_n$ est inversible.

   Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ *de module* > 1.
   Soit $X \in \ker(M - \lambda I_n)$*. On a donc* $(M - \lambda I_n)X = 0$*, c'est-à-dire* $MX = \lambda X$.

   - *D'après la question précédente, on a* $\|MX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$.
   - *Par ailleurs,* $\|MX\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \; \|X\|_\infty$.

   En comparant ces deux informations, on a $\underbrace{(|\lambda| - 1)}_{>0} \|X\|_\infty \leqslant 0$*, ce qui montre* $\|X\|_\infty = 0$.

   Par définition de $\|\cdot\|_\infty$*, on en déduit que tous les coefficients de* X *sont nuls, c'est-à-dire que* $X = 0$.
   On a ainsi montré $\ker(M - \lambda I_n) = \{0\}$*, ce qui montre que* $M - \lambda I_n$ *est inversible, d'après le critère nucléaire d'inversibilité.*

Partie II. Un processus de diffusion.

6. **Diagonalisation d'une matrice de permutation.** On définit un élément $\sigma \in \Sigma_n$ par :

$$\sigma : \begin{cases} [\![1, n]\!] \to & [\![1, n]\!] \\ \quad i \quad \mapsto & \begin{cases} i - 1 & \text{si } i \geqslant 2 \\ n & \text{si } i = 1. \end{cases} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $P_\sigma^n = I_n$.

   Une récurrence immédiate montre que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [\![1, n]\!], \underbrace{(\sigma \circ \cdots \circ \sigma)}_{k \text{ fois}}(x) \equiv x - k \pmod{n}$.

   En particulier, on a $\underbrace{\sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{n \text{ fois}} = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$

   En utilisant la question 1b (et une autre récurrence), on obtient donc $P_\sigma^n = P_{\sigma \circ \cdots \circ \sigma} = P_{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}} = I_n$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur non nul tels que $P_\sigma X = \lambda X$. Montrer que $\lambda \in \mathbb{U}_n$.

On a $P_\sigma^2 X = P_\sigma(\lambda X) = \lambda P_\sigma X = \lambda^2 X$. *Par une récurrence immédiate, on a donc*

$$X = P_\sigma^n X = \lambda^n X \qquad \textit{donc} \qquad (\lambda^n - 1)X = 0.$$

Comme le vecteur X *est non nul, on en déduit* $\lambda^n = 1$, *c'est-à-dire* $\lambda \in \mathbb{U}_n$.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{U}_n$. Montrer que le vecteur $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ vérifie $P_\sigma X_\lambda = \lambda X_\lambda$.

On a

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{donc} \qquad P_\sigma X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \lambda X_\lambda.$$

> Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\omega(k) = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}k\right)$.

(d) On définit $F = \Big(\omega\big((k-1)(\ell-1)\big)\Big)_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \in M_n(\mathbb{C})$ et $\overline{F}$ la matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient de F par son conjugué. On remarquera que, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, la ℓ-ième colonne de F est $X_{\omega(\ell-1)}$.
Calculer le produit $F\,\overline{F}$ et en déduire que $F \in GL_n(\mathbb{C})$.

Avant de se lancer dans le calcul, rappelons que si $\lambda \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$, *la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique montre que*

$$\sum_{x=0}^{n-1} \lambda^x = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} = 0$$

(et, évidemment, la somme vaut n *si* $\lambda = 1$*).*
Soit maintenant $k, \ell \in [\![1, n]\!]$. *On a*

$$\begin{aligned}
[F\,\overline{F}]_{k,\ell} &= \sum_{j=1}^{n} [F]_{k,j}\overline{[F]_{j,\ell}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega\big((k-1)(j-1)\big)\overline{\omega\big((j-1)(\ell-1)\big)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega\big((k-1)(j-1) - (j-1)(\ell-1)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega\big((k-\ell)(j-1)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega\big(k-\ell\big)^{j-1} \\
&= \sum_{x=0}^{n-1} \omega\big(k-\ell\big)^{x}, && \begin{bmatrix} x = j-1 \\ j = x+1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

qui vaut donc n *si* $k = \ell$ *et* 0 *sinon.*

Autrement dit, on a $F\,\overline{F} = n\,I_n$*, ce qui montre que* F *est inversible, et que* $F^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{F}$*.*

(e) Montrer que $F^{-1}P_\sigma F = \operatorname{diag}\big(\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n-1)\big)$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$*. On a* $Fe_j = X_{\omega(j-1)}$*, ce qui donne également* $e_j = F^{-1}X_{\omega(j-1)}$*. On a alors*

$$\begin{aligned}\left(F^{-1}P_\sigma F\right) e_j &= F^{-1}P_\sigma X_{\omega(j-1)} \\ &= \omega(j-1)\, F^{-1}X_{\omega(j-1)} && \textit{(d'après la question 6c)} \\ &= \omega(j-1)\, e_j,\end{aligned}$$

ce qui montre que la j*-ième colonne de* $F^{-1}P_\sigma F$ *est* $\omega(j-1)\, e_j$*.*

Cela étant valable pour tout $j \in [\![1, n]\!]$*, on a* $F^{-1}P_\sigma F = \operatorname{diag}\big(\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n-1)\big)$*.*

7. Exprimer la relation de récurrence (⧗) sous la forme $\forall t \in \mathbb{N}, X_{t+1} = AX_t$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice que l'on exprimera à l'aide de la matrice P_σ.

Soit $t \in \mathbb{N}$*. On a*

$$X_{t+1} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_n(t) + x_2(t)}{2} \\ \dfrac{x_1(t) + x_3(t)}{2} \\ \dfrac{x_2(t) + x_4(t)}{2} \\ \vdots \\ \dfrac{x_{n-1}(t) + x_1(t)}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \frac{P_\sigma + P_\sigma^T}{2}X_t = \frac{P_\sigma + P_\sigma^{-1}}{2}X_t.$$

En posant $A = \dfrac{P_\sigma + P_\sigma^{-1}}{2}$*, on a donc* $\forall t \in \mathbb{N}, X_{t+1} = AX_t$*.*

8. En déduire que l'on a $\forall t \in \mathbb{N}, X_t = F\, \operatorname{diag}(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \dots, \lambda_n^t)\, F^{-1}\, X_0$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des nombres réels que l'on précisera.

La relation $\forall t \in \mathbb{N}, X_{t+1} = A\, X_t$ *et une récurrence immédiate montrent* $\forall t \in \mathbb{N}, X_t = A^t\, X_0$*.*

Il reste simplement à montrer que $\forall t \in \mathbb{N}, A^t = F\, \operatorname{diag}(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \dots, \lambda_n^t)\, F^{-1}$*, pour des réels* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *encore à déterminer.*

D'après la question 6e, on a $F^{-1}P_\sigma F = \underbrace{\operatorname{diag}\big(\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n-1)\big)}_{\Delta}$*, c'est-à-dire* $P_\sigma = F\Delta F^{-1}$*.*

En passant à l'inverse, $P_\sigma^{-1} = \left(F\Delta F^{-1}\right)^{-1} = F\Delta^{-1}F^{-1}$*, donc*

$$\begin{aligned}A = \frac{P_\sigma + P_\sigma^{-1}}{2} &= \frac{F\Delta F^{-1} + F\Delta^{-1}F^{-1}}{2} \\ &= F\,\frac{\Delta + \Delta^{-1}}{2}\,F^{-1} \\ &= F\operatorname{diag}\left(\frac{\omega(0) + \omega(0)^{-1}}{2}, \frac{\omega(1) + \omega(1)^{-1}}{2}, \dots, \frac{\omega(n-1) + \omega(n-1)^{-1}}{2}\right) F^{-1} \\ &= F\operatorname{diag}\left(1, \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right), \dots, \cos\left(\frac{2\pi}{n}(n-1)\right)\right) F^{-1} \\ &= F\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)F^{-1},\end{aligned}$$

où, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$*, on a posé* $\lambda_j = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}(j-1)\right)$*.*

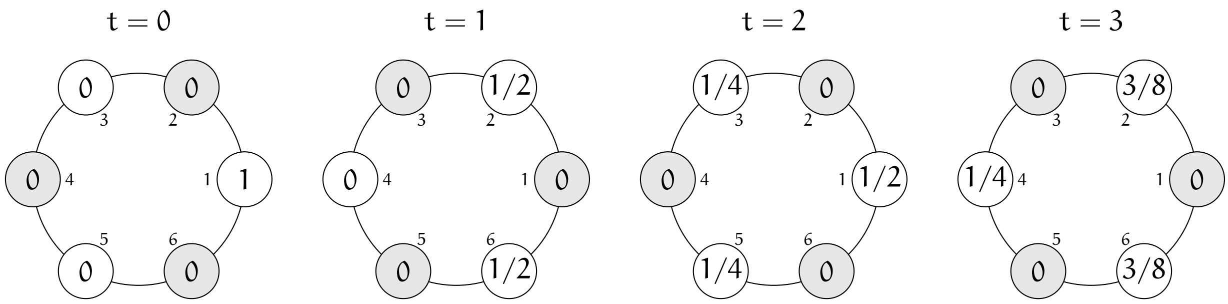
Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\begin{aligned} A^t &= \left(F \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) F^{-1}\right)^t \\ &= F \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^t F^{-1} \\ &= F \operatorname{diag}\left(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \dots, \lambda_n^t\right) F^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

9. On suppose n pair. Montrer que la suite $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

Le phénomène problématique (de périodicité) se voit sur des petits cas, comme par exemple ici quand $n = 6$*.*



Soit $t \in \mathbb{N}$*. On a alors*

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \text{ pair}}} x_k(t+1) &= x_2(t+1) + x_4(t+1) + x_6(t+1) + \dots + x_n(t+1) \\ &= \frac{x_1(t) + x_3(t)}{2} + \frac{x_3(t) + x_5(t)}{2} + \frac{x_5(t) + x_7(t)}{2} + \dots + \frac{x_{n-1}(t) + x_1(t)}{2} \\ &= x_1(t) + x_3(t) + x_5(t) + \dots + x_{n-1}(t) \\ &= \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \text{ impair}}} x_k(t) \end{aligned}$$

et, de même, $\displaystyle\sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \text{ impair}}} x_k(t+1) = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \text{ pair}}} x_k(t)$.

Vu la valeur de X_0*, une récurrence immédiate montre que*

$$\forall t \in \mathbb{N}, \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \text{ pair}}} x_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ pair} \\ 1 & \text{si } t \text{ impair.} \end{cases}$$

Cela montre que la suite $\displaystyle\left(\sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \text{ pair}}} x_k(t)\right)_{t \in \mathbb{N}}$ *ne converge pas, d'où l'on tire que* $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ *ne converge pas.*

10. On suppose n impair.

   (a) Montrer que $X_t \xrightarrow[t \to +\infty]{} \dfrac{1}{n} u$.

   Comme n *est impair, on a* $\lambda = 1$ *et* $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $\dfrac{2\pi}{n}(j-1) \not\equiv 0 \pmod{\pi}$*, donc* $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in]-1, 1[$.

En particulier, $\forall j \in [\![2, n]\!], \lambda_j^t \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
On en déduit $\operatorname{diag}\left(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \operatorname{diag}(1, 0, \ldots, 0)$.
Pour terminer le calcul, on remarque $FX_0 = u$*, et que les calculs de la question 6d entraînent que* $F^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{F}$*, donc* $F^{-1}X_0 = \dfrac{1}{n}\overline{F}X_0 = \dfrac{1}{n}u$.
On a alors

$$\begin{aligned} X_t = F\ \operatorname{diag}(\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t)\, F^{-1}\, X_0 &\xrightarrow[t\to+\infty]{} F\ \operatorname{diag}(1, 0, \ldots, 0) F^{-1} X_0 \\ &= \frac{1}{n} F \operatorname{diag}(1, 0, \ldots, 0) u \quad = \frac{1}{n} F\, X_0 = \frac{1}{n} u. \end{aligned}$$

(b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{N}, \left\| X_t - \dfrac{1}{n}u \right\|_\infty \leqslant \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^t$.

Pour tout $j \in [\![2, n]\!]$*, on a* $j - 1 \in [\![1, n-1]\!]$.

- *Si* $j - 1 \in [\![1, (n-1)/2]\!]$*, on a* $\dfrac{2\pi}{n}(j-1) \in \left[\dfrac{2\pi}{n}, \dfrac{\pi}{n}(n-1)\right] = \left[\dfrac{2\pi}{n}, \pi - \dfrac{\pi}{n}\right]$*, donc*

$$\lambda_j = \cos\left(\frac{2\pi}{n}(j-1)\right) \in \left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right] = \left[-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right],$$

  ce qui entraîne $|\lambda_j| \leqslant \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.
- *Par parité de cosinus, la même inégalité est valable si* $j - 1 \in [\![(n+1)/2, n-1]\!]$.

Remarquons que si $M \in M_n(\mathbb{C})$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$*, on a, pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} |[MY]_{k,1}| &= \left| \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell}\, y_k \right| \\ &\leqslant \left(\sum_{\ell=1}^{n} |[M]_{k,\ell}| \right) \|Y\|_\infty, \\ \text{donc} \qquad \|MY\|_\infty &\leqslant |\!|\!| M |\!|\!|\ \|Y\|_\infty, \end{aligned}$$

où l'on a défini, pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $|\!|\!| M |\!|\!| = \max\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{\ell=1}^{n} |[M]_{k,\ell}|$.

Comme en outre $\left\| F^{-1} X_0 \right\|_\infty = \left\| \dfrac{1}{n} u \right\|_\infty = \dfrac{1}{n}$*, on a bien, pour tout* $t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\| X_t - \frac{1}{n}u \right\|_\infty &= \left\| F\ \operatorname{diag}(1, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t)\, F^{-1}\, X_0 - F\ \operatorname{diag}(1, 0, \ldots, 0) F^{-1} X_0 \right\|_\infty \\ &= \left\| F\ \operatorname{diag}(0, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t)\, F^{-1}\, X_0 \right\|_\infty \\ &\leqslant |\!|\!| F |\!|\!|\ |\!|\!| \operatorname{diag}(0, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_n^t) |\!|\!|\ \left\| F^{-1} X_0 \right\|_\infty \\ &\leqslant n \max_{j=2}^{n} \left(\left|\lambda_j^t\right|\right)\ \frac{1}{n} \\ &\leqslant \left(\max_{j=2}^{n} (|\lambda_j|) \right)^t \\ &\leqslant \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)^t. \end{aligned}$$

Partie III. Théorème des mariages de Hall (1935).

Dans toute cette partie, on fixe un ensemble fini Ω.
On dit que p parties $A_1, \dots, A_p \subseteq \Omega$ vérifient la *condition de Hall* si on a l'inégalité de cardinaux :

$$\forall K \in \mathcal{P}(\llbracket 1, p \rrbracket), \left| \bigcup_{k \in K} A_k \right| \geqslant |K| .$$

On s'intéresse à l'existence d'un *système de représentants distincts* (en abrégé, SRD), c'est-à-dire à l'existence d'un p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \Omega^p$ tel que

- l'on ait $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_k \in A_k$;
- les p éléments $x_1, x_2, \dots, x_p$ soient tous différents.

Par exemple, pour les quatre parties $A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{1, 3\}, A_3 = \{3\}, A_4 = \{2, 3, 4\}$ de $\Omega = \llbracket 1, 4 \rrbracket$, le quadruplet $(2, 1, 3, 4)$ est un SRD (on peut d'ailleurs vérifier que c'est le seul).

Le but de cette partie est de démontrer le *théorème des mariages de Hall*, qui affirme qu'il existe un SRD pour $A_1, \dots, A_p$ si et seulement s'ils vérifient la condition de Hall.

11. Soit $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Montrer que s'il existe un SRD pour les parties $A_1, \dots, A_p$, ils vérifient la condition de Hall.

Supposons qu'il existe un SRD $(x_1, \dots, x_p)$ *pour* $A_1, \dots, A_p$.
Soit $K \subseteq \llbracket 1, p \rrbracket$.
La famille $(a_k)_{k \in K}$ *est alors constituée de* $|K|$ *éléments tous différents et, par construction, on a les appartenances* $\forall k \in K, a_k \in A_k$, *donc* $\left\{ a_k \mid k \in K \right\} \subseteq \bigcup_{k \in K} A_k$, *ce qui montre* $\left| \bigcup_{k \in K} A_k \right| \geqslant |K|$.

Pour montrer que la condition de Hall est également suffisante, nous allons maintenant procéder par récurrence forte.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}(p)$ l'assertion :

quelles que soient $A_1, \dots, A_p \subseteq \Omega$ vérifiant la condition de Hall, elles admettent un SRD.

L'initialisation $\mathcal{H}(1)$ étant évidente, on fixe un entier $p \geqslant 2$, on suppose $\mathcal{H}(1), \mathcal{H}(2), \dots, \mathcal{H}(p-1)$ vraies, et on cherche à montrer $\mathcal{H}(p)$.

Soit donc $A_1, \dots, A_p \subseteq \Omega$ vérifiant la condition de Hall.

12. On suppose ici qu'il existe $L \subseteq \llbracket 1, p \rrbracket$ de cardinal $\ell \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ telle que $\left| \bigcup_{j \in L} A_j \right| = \ell$.
En appliquant notamment l'hypothèse $\mathcal{H}(\ell)$, montrer qu'il existe un SRD pour $A_1, \dots, A_p$.

Pour simplifier les notations, quitte à renuméroter les parties $A_1, \dots, A_p$, *on suppose* $L = \llbracket p+1-\ell, p \rrbracket$.

On a donc $\left| \bigcup_{k=p+1-\ell}^{p} A_k \right| = \ell$.

- *Les* ℓ *parties* $A_{p+1-\ell}, \dots, A_p$ *vérifient* a fortiori *la condition de Hall. D'après* $\mathcal{H}(\ell)$, *on peut donc trouver un SRD* $(x_{p+1-\ell}, \dots, x_p)$ *pour ces parties.*

  Par inclusion et égalité des cardinaux, on a donc $\bigcup_{j=p+1-\ell}^{p} A_j = \{x_{p+1-\ell}, \dots, x_p\}$.

- *Pour tout* $k \in [\![1, p-\ell]\!]$, *on définit maintenant* $B_k = A_k \setminus \bigcup_{j=p+1-\ell}^{p} A_j$.

  Montrons que $B_1, \dots, B_{p-\ell}$ *vérifient la condition de Hall. Soit* $K \subseteq [\![1, p-\ell]\!]$. *On a*

$$\bigcup_{k \in K} B_k = \left(\bigcup_{k \in K} A_k\right) \setminus \left(\bigcup_{j=p+1-\ell}^{p} A_j\right) = \left(\bigcup_{k \in K \cup [\![p+1-\ell]\!]} A_k\right) \setminus \left(\bigcup_{j=p+1-\ell}^{p} A_j\right).$$

  D'après la condition de Hall, $\bigcup_{k \in K \cup [\![p+1-\ell]\!]} A_k$ *possède au moins* $|K| + \ell$ *éléments.*

  Par hypothèse, l'union $\bigcup_{j=p+1-\ell}^{p} A_j$ *possède exactement* ℓ *éléments.*

  On en déduit que $\bigcup_{k \in K} B_k$ *possède au moins* $|K|$ *éléments, ce qui conclut.*

- *Puisque* $B_1, \dots, B_{p-\ell}$ *vérifient la condition de Hall, on peut trouver d'après* $\mathcal{H}(p-\ell)$ *un SRD* $(x_1, \dots, x_{p-\ell})$ *pour ces parties.*

  Par construction, aucun de ces éléments n'appartient à $\bigcup_{j=p+1-\ell}^{p} A_j$, *donc ils sont tous distincts des éléments* $x_{p+1-\ell}, \dots, x_p$.
  Cela montre que $(x_1, \dots, x_p)$ *est un SRD pour* $A_1, \dots, A_p$.

13. Conclure la démonstration par récurrence.

    Il reste à traiter le cas où, pour toute partie $K \subseteq [\![1, p]\!]$ *différente de* $\varnothing$ *et de* $[\![1, p]\!]$, *on a l'inégalité stricte* $\left|\bigcup_{k \in K} A_k\right| > |K|$.
    En particulier, A_p *est non vide : on choisit une fois pour toutes un élément* $x_p \in A_p$.
    On vérifie alors facilement que les parties $B_1 = A_1 \setminus \{x_p\}, \dots, B_{p-1} = A_{p-1} \setminus \{x_p\}$ *vérifient la condition de Hall.*
    D'après $\mathcal{H}(p-1)$, *on peut donc trouver un SRD* $(x_1, \dots, x_{p-1})$ *pour* $B_1, \dots, B_{p-1}$.
    Aucun de ces éléments n'est x_p, *ce qui montre que* $(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p)$ *est un SRD pour* $B_1, \dots, B_{p-1}, A_p$ *et donc* a fortiori *pour* $A_1, \dots, A_p$.

Partie IV. Théorème de Birkhoff-von Neumann (1946).

On note Λ l'ensemble des familles $(\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_n}$ de réels **positifs** tels que $\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_\sigma = 1$. On définit alors l'*enveloppe convexe de l'ensemble des matrices de permutation*

$$\mathcal{C}_n = \left\{ \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_\sigma P_\sigma \;\middle|\; (\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_n} \in \Lambda \right\}.$$

Le but principal de cette partie est de montrer le *théorème de Birkhoff-von Neumann* : $\mathcal{B}_n = \mathcal{C}_n$.

14. Montrer $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{B}_n$.

    Il est tout d'abord clair que $\forall \sigma \in \Sigma_n, P_\sigma \in \mathcal{B}_n$.
    Soit $A \in \mathcal{C}_n$. *On peut donc trouver une famille* $(\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_n}$ *de réels positifs tels que* $\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_\sigma = 1$ *et* $A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_\sigma P_\sigma$. *On a alors*

- *pour tous* $i, j \in [\![1, n]\!]$, $[A]_{i,j} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_\sigma [P_\sigma]_{i,j} \geqslant 0$ *;*
- $Au = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_\sigma P_\sigma u = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_\sigma u = u$ *;*
- *en appliquant le point précédent à* $A^T = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_\sigma P_\sigma^T = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \lambda_\sigma P_\sigma^{-1} \in \mathcal{C}_n$*, on obtient* $A^T u = u$.

Cela montre que $A \in \mathcal{B}_n$.

15. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $M \geqslant 0$ et qu'il existe $s \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $Mu = M^T u = su$.
En utilisant le théorème des mariages de Hall, montrer qu'il existe $\sigma \in \Sigma_n$ et $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$M - \mu P_\sigma \geqslant 0.$$

Notons que la condition $Mu = M^T u = su$ *signifie que la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne de* M *vaut* s.

- *Pour tout* $\ell \in [\![1, n]\!]$*, on considère l'ensemble*

$$A_\ell = \{k \in [\![1, n]\!] \mid [M]_{k,\ell} \neq 0\} = \{k \in [\![1, n]\!] \mid [M]_{k,\ell} > 0\} \subseteq [\![1, n]\!].$$

Montrons que $A_1, \ldots, A_n$ *vérifient la condition de Hall.*
Soit $L \subseteq [\![1, n]\!]$. *Notons* $T = \bigcup_{\ell \in L} A_\ell$.
D'un côté, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \in L} \sum_{k \in T} [M]_{k,\ell} &= \sum_{\ell \in L} \sum_{k=1}^{n} [M]_{k,\ell} && \text{(car } [M]_{k,\ell} = 0 \text{ si } k \notin T \text{ et } \ell \in L\text{)} \\ &= \sum_{\ell \in L} s \\ &= s\,|L|\,. \end{aligned}$$

De l'autre,

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \in L} \sum_{k \in T} [M]_{k,\ell} &= \sum_{k \in T} \sum_{\ell \in L} [M]_{k,\ell} \\ &\leqslant \sum_{k \in T} \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{k,\ell} && \text{(car } M \geqslant 0\text{)} \\ &\leqslant \sum_{k \in T} s \\ &= s\,|T|\,. \end{aligned}$$

On a donc $s\,|T| \geqslant s\,|L|$. *Comme* $s > 0$*, on en déduit* $|T| \geqslant |L|$.

- *Le théorème des mariages de Hall entraîne alors l'existence d'un SRD*

$$\sigma(1) \in A_1, \ldots, \sigma(n) \in A_n$$

tel que $\forall \ell \in [\![1, n]\!], [M]_{\sigma(\ell),\ell} > 0$. *Le fait qu'il s'agisse d'un SRD se traduit en l'injectivité de* σ *et donc en l'appartenance* $\sigma \in \Sigma_n$.

- *Si l'on pose maintenant* $\mu = \min\left([M]_{\sigma(1),1}, \ldots, [M]_{\sigma(n),n}\right) > 0$*, on a bien*

$$\forall \ell \in [\![1, n]\!], \quad \underbrace{\mu}_{=\mu\,[P_\sigma]_{\sigma(\ell),\ell}} \leqslant [M]_{\sigma(\ell),\ell}.$$

Puisque les autres coefficients de $\mu\,P_\sigma$ *sont nuls et que* $M \geqslant 0$*, on en déduit* $M - \mu\,P_\sigma \geqslant 0$*, ce qui conclut.*

16. Conclure la démonstration du théorème de Birkhoff-von Neumann.

Soit $A \in \mathcal{B}_n$.

- *Parmi toutes les matrices de la forme* $M = A - \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mu_\sigma P_\sigma$*, où* $(\mu_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_n}$ *est une famille de réels positifs tels que* $M \geqslant 0$*, on en considère une, notée* M_0*, qui possède un nombre minimal de coefficients non nuls.*
Montrons que $M_0 = 0$.
Supposons par l'absurde que $M_0 \neq 0$ *: tous les coefficients de cette matrice sont donc* $\geqslant 0$*, et au moins l'un d'entre eux est strictement positif.*
Remarquons maintenant que
$$M_0 u = Au - \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mu_\sigma \underbrace{P_\sigma u}_{=u} = \left(1 - \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mu_\sigma\right) u$$
et que, de même, $M_0^T u = \left(1 - \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mu_\sigma\right) u$.
Notons $s = 1 - \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mu_\sigma$*, qui est donc la somme des éléments d'une ligne ou d'une colonne quelconque de* M_0.
Vu l'hypothèse sur les coefficients de M_0*, on a* $s > 0$.
La question précédente permet alors de trouver $\mu > 0$ *et* σ *tel que* $M_0 - \mu P_\sigma \geqslant 0$.
Cela signifie que, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, $[M_0]_{\sigma(\ell), \ell} \geqslant \mu > 0$.
Si l'on prend $\ell_0 \in [\![1, n]\!]$ *tel que*
$$[M_0]_{\sigma(\ell_0), \ell_0} = \min_{\ell=1}^{n} [M_0]_{\sigma(\ell), \ell}$$
et que l'on note μ' *ce minimum, la différence* $M' = M_0 - \mu' P_\sigma$ *reste positive, mais possède au moins un coefficient nul de plus que* M_0*, à savoir* $[M']_{\sigma(\ell_0), \ell_0} = 0$.
Cela contredit la définition de M_0 *et fournit une contradiction. On a donc montré* $M_0 = 0$.
- *La première étape du raisonnement montre donc l'existence d'une famille de réels positifs* $(\mu_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_n}$ *telle que* $A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mu_\sigma P_\sigma$.
En considérant la somme des éléments de A *apparaissant sur une ligne ou une colonne, on obtient* $\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mu_\sigma = 1$*, ce qui conclut la démonstration du théorème de Birkhoff-von Neumann.*