Sixième composition de mathématiques

Durée : *4 heures (aucune sortie ne sera autorisée pendant les dix dernières minutes).*

Les consignes de présentation sont les mêmes que d'habitude !

Comme souvent, le sujet est vraisemblablement trop long pour être traité convenablement en quatre heures : ne paniquez pas et appliquez-vous pour bien réussir les questions que vous entreprenez.

Exercice. Autour de la série harmonique.

Les deux parties sont largement indépendantes.

Partie I.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction $f \in D^1(]-1, +\infty[)$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $\Sigma_n(f) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right)$.

1. (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
   (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera sa limite S_∞.
2. (a) On suppose $f(0) \neq 0$. Montrer que la suite $\big(\Sigma_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.
   (b) On suppose $f(0) = 0$. En revenant à la définition de la dérivée comme limite, montrer que la suite $\big(\Sigma_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et donner une expression de sa limite en fonction de S_∞.
   (c) Déduire de ce qui précède la valeur de S_∞, à l'aide de la fonction $h : x \mapsto \ln(1 + x)$.

Partie II. Moyenne logarithmique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3. (a) Montrer que les suites $\big(H_n - \ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(H_n - \ln(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   (b) Utiliser la question précédente pour déterminer à nouveau la limite S_∞ de la partie I.
   (c) Déterminer la limite de $\left(\dfrac{1}{\ln n} H_n\right)_{n\geqslant 2}$.
4. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
   (a) On suppose $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer $\dfrac{1}{H_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   (b) On suppose $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Déterminer la limite de $\left(\dfrac{1}{\ln n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}\right)_{n\geqslant 2}$.
5. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que, si $\dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{1}{\ln n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

      Indication. *On pourra calculer la somme* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{U_k}{k+1} - \frac{U_{k-1}}{k}\right)$, *où* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Donner un exemple montrant que la réciproque de la question précédente est fausse.

Problème. Problème de Dyer.

Le *problème de Dyer*, posé en 1954, demande si deux fonctions continues $f, g : [0,1] \to [0,1]$ commutant (c'est-à-dire telles que $f \circ g = g \circ f$) possèdent nécessairement un point fixe commun.

En 1969, indépendamment, William M. Boyce et John Philip Huneke ont répondu négativement à ce problème, en construisant des exemples (assez compliqués) de couples (f, g) de fonctions continues commutant sans point fixe commun.

Cependant, le problème a également engendré un grand nombre de résultats positifs montrant l'existence de points fixes communs sous des hypothèses plus restrictives. Ce problème explore certains de ces résultats.

Dans tout le problème, les lettres f et g désigneront toujours des fonctions continues $[0,1] \to [0,1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

Étant donné une fonction $h : [0,1] \to [0,1]$, on note

- $h^n = \underbrace{h \circ h \circ \cdots \circ h}_{n \text{ fois}}$, de telle sorte que $h^0 = \mathrm{id}_{[0,1]}$ et $h^1 = h$;
- $\mathrm{Fix}(h) = \{x \in [0,1] \mid h(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de h ;
- $\mathrm{Pér}(h) = \{x \in [0,1] \mid \exists n \in \mathbb{N} : h^n(x) = x\}$ l'ensemble des *points périodiques* de h.

Partie I. Préliminaires sur les points fixes et périodiques.

1. **Lemme-clef.** Soit $x \in \mathrm{Fix}(f)$. Montrer que $g(x) \in \mathrm{Fix}(f)$.
2. **Non-vacuité de** $\mathrm{Fix}(h)$**.** Soit $h : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que $\mathrm{Fix}(h)$ est non vide.
3. **Fermeture de** $\mathrm{Fix}(h)$**.** Soit $h : [0,1] \to [0,1]$ continue.
   (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathrm{Fix}(h)$.
   On suppose que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée x_∞. Montrer que $x_\infty \in \mathrm{Fix}(h)$.
   (b) En déduire que $\overline{\mathrm{Fix}(h)} = \mathrm{Fix}(h)$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Fix}(h)$ possède un maximum et un minimum.

4. **Un exemple.** On considère la *fonction tente* $\tau : \begin{cases} [0,1] \to & [0,1] \\ x \mapsto & \min(2x, 2-2x). \end{cases}$
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $D_k = \left\{ \frac{m}{2^k} \,\middle|\, m \in [\![0, 2^k]\!] \text{ impair} \right\}$.
   (a) Montrer que τ est continue, et dessiner le graphe de τ et celui de τ^2.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\tau[D_{k+1}] = D_k$.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_k$. Calculer $\tau^{k-1}(x), \tau^k(x)$ et $\tau^{k+1}(x)$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Pér}(\tau)$ et $[0,1] \setminus \mathrm{Pér}(\tau)$ sont denses dans $[0,1]$.

Partie II. Cas monotone (et autres cas faciles).

5. On suppose f décroissante.
   (a) Que dire de $\mathrm{Fix}(f)$?
   (b) En déduire que dans ce cas, f et g possèdent un point fixe commun.
6. On suppose que $\mathrm{Fix}(f)$ est un intervalle. Montrer que f et g possèdent un point fixe commun.
7. (a) On suppose que, pour tout $x_0 \in [0,1]$, la suite $\left(f^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   Montrer que f et g possèdent un point fixe commun.
   (b) En déduire que, si f est croissante, alors f et g possèdent un point fixe commun.

Partie III. Le cas acyclique (Maxfield-Mourant et Chu-Moyer (1965-1966)).

Dans toute la section, on fixe $h : [0,1] \to [0,1]$ continue.

Étant donné $x_0 \in [0,1]$, on note $\omega(x_0)$ (ou $\omega_h(x_0)$ s'il y a un risque d'ambiguïté) l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(h^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le but de la section est de montrer que, pour tout $x_0 \in [0,1]$, $\omega(x_0) \cap \overline{\text{Pér}(h)} \neq \varnothing$, puis d'en déduire une nouvelle réponse partielle au problème de Dyer.

Soit $x_0 \in [0,1]$.

8. Montrer que l'ensemble $\omega(x_0)$ est stable sous h, c'est-à-dire que $\forall z \in \omega(x_0)$, $h(z) \in \omega(x_0)$.
9. On suppose que la suite $\left(h^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ prend un nombre fini de valeurs.
   (a) Montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $h^p(x_0) \in \text{Pér}(h)$.
   (b) On fixe un entier p minimal tel que $h^p(x_0) \in \text{Pér}(h)$. Décrire $\omega(x_0)$ et conclure.

On peut montrer (c'est par exemple une conséquence du lemme de Zorn) qu'il existe en toute généralité un nombre $\mu \in \omega(x_0)$ tel qu'en outre $\mu = \min\left(\omega(\mu)\right)$. Dans la suite de cette section, on admet ce résultat, et on fixe un tel nombre μ.

10. On suppose désormais que $\left(h^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ prend un nombre infini de valeurs différentes.
    (a) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*, h^p(\mu) \geqslant \mu$.
    (b) On suppose maintenant $\forall p \in \mathbb{N}^*, h^p(\mu) > \mu$. Soit $\varepsilon > 0$.
    Montrer qu'il existe deux entiers $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mu < h^{p+q}(\mu) < h^p(\mu) \leqslant \mu + \varepsilon$.
    (c) Conclure.
11. On suppose $\text{Pér}(f) = \text{Fix}(f)$. Montrer que f et g possèdent un point fixe commun.

Partie IV. Théorème de Cano (1984).

Un ensemble $\mathscr{F}$ de fonctions continues $[0,1] \to [0,1]$ est dit *équicontinu* en $a \in [0,1]$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall f \in \mathscr{F}, \forall x \in [0,1], |x-a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Le même ensemble est dit *équicontinu* s'il est équicontinu en a, pour tout $a \in [0,1]$.

12. **Un exemple.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n : \begin{cases} [0,1] \to [0,1] \\ x \mapsto x^n \end{cases}$ et $\mathscr{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
    (a) Montrer que $\mathscr{P}$ est équicontinu en 0.
    (b) Montrer que $\mathscr{P}$ n'est pas équicontinu en 1.
    (c) Soit $a \in]0,1[$. L'ensemble de fonctions $\mathscr{P}$ est-il équicontinu en a ?

Dans la fin de ce devoir, on suppose que l'ensemble $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ des itérées de f est équicontinu, et on cherche à montrer que $\text{Fix}(f)$ est un intervalle, ce qui entraînera que f et g possèdent un point fixe commun, d'après la partie II.

13. On suppose par l'absurde que $\text{Fix}(f)$ n'est pas un intervalle.
    Montrer qu'il existe $a < b \in \text{Fix}(f)$ tels que $\forall x \in]a,b[, f(x) > x$ ou $\forall x \in]a,b[, f(x) < x$.
14. Par symétrie, on se place dans le cas où $\forall x \in]a,b[, f(x) > x$.
    Montrer que l'on ne peut pas avoir $\forall x \in]a,b[, f^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$, et en déduire l'existence d'un point $z \in]a,b[$ tel que $f(z) = b$ et $\forall x \in]a,z[, f(x) < b$.
15. Aboutir à une contradiction.