Huitième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci* $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre.*

Les documents, calculatrices, etc. sont ***interdits****.*

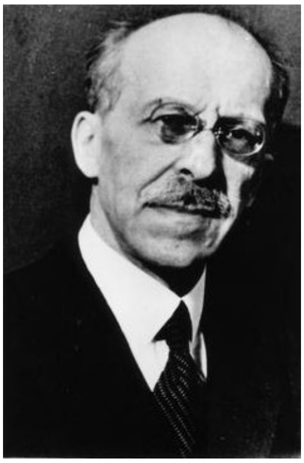
Exercice.

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$ se prolonge par continuité en une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, et donner un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln \circ f$.
2. Donner un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(\sin x)}$.

Problème. Théorèmes de Schur et de Burnside.


William Burnside


Issai Schur


Maryam Mirzâkhâni

- Dans tout le problème, n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et K un corps.
- **Bases canoniques.**
  - On notera $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n.
  - Si $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}^{(n)} \in M_n(K)$ la matrice élémentaire de $M_n(K)$ dont le seul élément non nul est un 1, en position (i, j). S'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra la noter plus brièvement $E_{i,j}$.
- On rappelle qu'une *sous-algèbre* de $M_n(K)$ est une partie $A \subseteq M_n(K)$ qui est à la fois un sous-espace vectoriel du K-espace vectoriel $M_n(K)$ et un sous-anneau de l'anneau $M_n(K)$.
- Étant donné un K-espace vectoriel E, son *dual* est $E^* = \mathscr{L}(E, K)$.
- On note simplement $T_n(K)$ la sous-algèbre de $M_n(K)$ des matrices triangulaires supérieures.

Partie I. Préliminaires.

On regroupe dans cette partie des éléments utiles dans les deux parties suivantes.

Quelques sous-algèbres de $M_n(K)$

1. Montrer que si A est une partie de $M_n(K)$ stable par multiplication et contenant I_n, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est une sous-algèbre de $M_n(K)$.
2. Donner les dimensions des sous-algèbres $D_n(K)$ et $T_n(K)$, en rappelant rapidement une démonstration de ce que vous affirmez.
3. Soit $q \in [\![1, n-1]\!]$.
   Soit P_q l'ensemble des matrices $M \in M_n(K)$ telles que $\forall (i, j) \in [\![q+1, n]\!] \times [\![1, q]\!], [M]_{i,j} = 0$.
   (a) Montrer qu'il s'agit d'une sous-algèbre de $M_n(K)$.
   (b) Calculer $\dim P_q$.
4. Soit $A \subseteq M_n(K)$ une sous-algèbre de $M_n(K)$. Montrer que l'ensemble $A^T = \left\{ M^T \,\middle|\, M \in A \right\}$ est une sous-algèbre de $M_n(K)$.

Matrices de rang un

5. Montrer qu'une matrice $M \in M_n(K)$ est de rang 1 si et seulement s'il existe $x, y \in K^n$ non nuls tels que $M = x\,y^T$.

Orthogonalité

- Pour tous $x, y \in K^n$, on définit $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in K$.
- Étant donné une partie X de K^n, on note $X^\perp = \{y \in K^n \mid \forall x \in X, \langle x|y\rangle = 0\}$.
- Pour tout $x \in K^n$, on note $\varphi_x : \begin{cases} K^n \to K \\ y \mapsto \langle x|y\rangle \end{cases}$.
- Enfin, on dit que deux sous-espaces vectoriels V et W de K^n sont *orthogonaux* si

$$\forall x \in V, \forall y \in W, \langle x|y\rangle = 0.$$

6. Soit $x \in K^n$. Montrer que φ_x est une application linéaire.
7. Déterminer $\{0_{K^n}\}^\perp$ et $(K^n)^\perp$.
8. Soit V un sous-espace vectoriel de K^n. Montrer que $V^\perp$ est un sous-espace vectoriel de K^n.
9. Soit V un sous-espace vectoriel de K^n et $\Phi : \begin{cases} K^n \to V^* \\ x \mapsto (\varphi_x)_{|V} \end{cases}$.
   (a) Montrer que Φ est une application linéaire.
   (b) Montrer $\ker \Phi = V^\perp$.
   (c) Montrer que Φ est surjective.
   (d) En déduire que $\dim V^\perp = n - \dim V$.
10. Soit V, W deux sous-espaces vectoriels de K^n orthogonaux.
    Déduire de ce qui précède que $\dim V + \dim W \leqslant n$.

Partie II. Théorème de Schur (1905).

- Dans toute cette partie, on appelle *espace de Schur d'ordre* n tout sous-espace vectoriel $S \subseteq T_n(K)$ tel que $\forall M, N \in S, MN = NM$.
- On note $s_n \in \mathbb{N}$ la dimension maximale d'un espace de Schur d'ordre n. Le but de cette partie est de calculer s_n, ce qui constitue un résultat dû à Issai Schur (1875-1941). On suit une démonstration de 1998, due à Maryam Mirzâkhâni (1977-2017, médaillée Fields en 2014).

11. Déterminer s_1 et s_2 et montrer que si $n \geqslant 2$, alors $n \leqslant s_n \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2} - 1$.
12. Dans toute cette question, qui constitue le cœur de la démonstration, on fixe S, un espace de Schur d'ordre $n+1$. On définit alors

$$H = S \cap \mathrm{Vect}\left(E_{1,1}^{(n+1)}, E_{1,2}^{(n+1)}, \dots, E_{1,n+1}^{(n+1)}\right), \qquad V = S \cap \mathrm{Vect}\left(E_{1,n+1}^{(n+1)}, E_{2,n+1}^{(n+1)}, \dots, E_{n+1,n+1}^{(n+1)}\right)$$

    et l'application (clairement linéaire) $\Omega : \begin{cases} T_{n+1}(K) \to T_n(K) \\ M \mapsto ([M]_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \end{cases}$.
    (a) Montrer que l'image directe $\Omega[S]$ est un espace de Schur d'ordre n.
    (b) En déduire que $\dim V \geqslant \dim S - s_n$.
    (c) Montrer que $\dim H \geqslant \dim S - s_n$.
    (d) Montrer que $\forall M \in H, \forall N \in V, MN = 0$.
    (e) Déduire de ce qui précède que $2(s_{n+1} - s_n) \leqslant n + 1$.
13. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $s_{2n+1} \leqslant n^2 + n + 1$ et $s_{2n} \leqslant n^2 + 1$.

14. À l'aide de $S = \mathrm{Vect}\left(\{I_{2n}\} \cup \left\{ E_{i,j}^{(2n)} \,\middle|\, (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![n+1,2n]\!] \right\}\right)$, montrer que $s_{2n} = n^2 + 1$.
15. Montrer que $s_{2n+1} = n^2 + n + 1$.
16. Soit $n \geqslant 1$ et S un espace de Schur d'ordre n et de dimension s_n.
    Montrer que S est une sous-algèbre de $M_n(K)$.

Partie III. Théorème de Burnside (1905).

Cette partie est indépendante de la partie II.

On définit des notions relatives à une sous-algèbre A de $M_n(K)$.

- Un sous-espace vectoriel V de K^n est dit *stable sous* A si $\forall M \in A, \forall x \in V, Mx \in V$.
- On dit que A est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels stables sous A sont $\{0_{K^n}\}$ et K^n.

17. Soit $n \geqslant 2$. On rappelle qu'on a défini à la question 3 une sous-algèbre P_q de $M_n(K)$, pour tout entier $q \in [\![1, n-1]\!]$.
    (a) Montrer que P_q n'est pas irréductible.
    (b) Soit A une sous-algèbre de $M_n(K)$ non irréductible.
    Montrer qu'il existe $q \in [\![1, n-1]\!]$ et $Q \in GL_n(K)$ telle que

$$\left\{ Q^{-1}MQ \,\middle|\, M \in A \right\} \subseteq P_q.$$

18. Montrer que si $V \subseteq K^n$ est un sous-espace vectoriel stable sous A, alors $V^\perp$ est stable sous A^T.
19. Montrer que si A est irréductible, alors A^T aussi.
20. Montrer que A est irréductible si et seulement si

$$\forall x \in K^n \setminus \{0\}, \forall y \in K^n, \exists M \in A : Mx = y.$$

21. Supposons A irréductible.
    (a) Montrer que si A contient une matrice M_0 de rang 1, toutes les matrices de rang 1 de $M_n(K)$ s'écrivent sous la forme UM_0V, avec $U, V \in A$.
    (b) En déduire que si A contient une matrice de rang 1, alors $A = M_n(K)$.

Dans la suite du problème, $K = \mathbb{C}$ et on considère une sous-algèbre irréductible A de $M_n(\mathbb{C})$.
On va montrer que $A = M_n(\mathbb{C})$, ce qui est un théorème dû à William Burnside (1852-1927).

- On admet que si E est un espace vectoriel de dimension finie non trivial sur le corps des complexes et que $u \in \mathscr{L}(E)$, alors il existe $\lambda \in K$ tel que $u - \lambda\, \mathrm{id}_E$ ne soit pas un automorphisme.

22. (a) Montrer que si $T \in A$ vérifie $\mathrm{rg}\, T \geqslant 2$, on peut trouver $S \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$1 \leqslant \mathrm{rg}\left((TS - \lambda I_n)T\right) < \mathrm{rg}\, T.$$

    (b) En déduire que la seule sous-algèbre irréductible de $M_n(\mathbb{C})$ est $M_n(\mathbb{C})$ elle-même.
23. Montrer que le théorème de Burnside est faux si l'on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.
24. **Application.** Soit A une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer $\dim A \in [\![1, n^2 - n + 1]\!] \cup \{n^2\}$.