
Logique, ensembles et applications

Thèmes

Logique

- ▶ Assertions (opérateurs logiques et, ou, \Rightarrow , quantificateurs) ; négation d'une assertion.
- ▶ Modes de raisonnement : Structure de la preuve d'une « \forall -assertion » $\forall x \in X, P(x)$ ou d'une « \exists -assertion » $\exists x \in X : P(x)$, disjonction de cas, contraposée, raisonnement par l'absurde, double implication, raisonnement par analyse et synthèse, démonstration d'une unicité.
- ▶ Différents types de récurrence (simple, double, forte).

Ensembles et applications

- ▶ Généralités sur les ensembles : ensembles définis en compréhension, par paramétrage ; inclusion ; ensemble des parties.
- ▶ Opérations : union, intersection (de deux ensembles ou d'une famille $(A_i)_{i \in I}$), différence, produit cartésien (d'un nombre fini d'ensembles).
- ▶ Généralités sur les applications : injectivité, surjectivité, bijectivité ; lien avec l'existence d'une réciproque ; restriction, application induite par une application donnée ; fonctions indicatrices.
- ▶ Image directe, image réciproque et leurs propriétés.
- ▶ Ensembles finis :
 - Principe des tiroirs. Définition d'un ensemble fini et du cardinal d'un ensemble fini.
 - Cardinal d'une partie. Démonstration d'une égalité par « inclusion et égalité des cardinaux ».
 - Cardinal de $\bigsqcup_{i=1}^r E_i, E \cup F, E \times F, F^E, \mathcal{P}(E)$.
 - Applications entre ensembles finis : injectivité, surjectivité, bijectivité.
 - Existence d'un maximum pour les parties finies non vides de \mathbb{R} et les parties non vides et majorées de \mathbb{Z} .
 - Récurrences finies.
 - Quelques mots sur les ensembles infinis (injection $\mathbb{N} \rightarrow E$, théorème de Cantor sur $\mathcal{P}(E)$).

Questions de cours

- ▶ Double distributivité : $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B$ et $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup B$.
- ▶ Stabilité de l'injectivité et de la surjectivité par composition. Réciproque partielle.
- ▶ Équivalence entre la bijectivité et l'existence d'une réciproque.
- ▶ Propriétés de l'image directe (croissance pour l'inclusion, image directe d'une union) et de l'image réciproque (croissance pour l'inclusion, image réciproque d'une union, d'une intersection, d'un complémentaire).

On pourra remplacer la question de cours par un exercice très simple demandant une démonstration par récurrence, dont la rédaction devra être parfaitement soignée.