
Matrices et systèmes linéaires

Thèmes

- ▶ Définition : somme et produits, propriétés générales (not. bilinéarité et associativité du produit matriciel), transposée, matrices élémentaires.
- ▶ Matrices carrées : commutation, inversibilité, puissances. Binôme de Newton et factorisation de $A^n - B^n$ si $AB = BA$.
- ▶ Trace : linéarité et cyclicité.
- ▶ Parties remarquables : matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques.
- ▶ Résolution de systèmes linéaires par la méthode du pivot, et interprétation matricielle des opérations sur les lignes.
- ▶ Conséquences théoriques du pivot : caractérisation de l'inversibilité de A *via* son noyau, inversibilité à gauche et à droite, systèmes de Cramer, génération de $GL_n(K)$ par les matrices d'opérations élémentaires et calcul de l'inverse par les opérations élémentaires.
- ▶ Réduction des matrices 2×2 : déterminant 2×2 et ses propriétés ; valeurs et vecteurs propres, polynôme caractéristique ; similitude ; classification des matrices 2×2 réelles ou complexes à similitude près.
- ▶ Suites arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Questions de cours

- ▶ associativité du produit matriciel ;
- ▶ produit de matrices élémentaires ;
- ▶ cyclicité de la trace ;
- ▶ stabilité de $D_n(K)$ et $T_n^\pm(K)$ par produit ;
- ▶ définition et propriétés du déterminant 2×2 ;
- ▶ les valeurs propres de $A \in M_2(K)$ sont les racines de son polynôme caractéristique ;
- ▶ *lemme de descente* : si $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ sont semblables sur \mathbb{C} , elles sont semblables sur \mathbb{R} .

Une résolution de systèmes linéaires, un calcul d'inverse ou de puissance, la détermination d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, etc. pourra tenir lieu de question de cours.