Espaces vectoriels (sans applications linéaires)

Thèmes

- K-espaces vectoriels : définition, exemples et règles de calcul.
- Familles presque nulles, combinaisons linéaires.
- K-algèbres : définition et exemples des extensions de corps.
- Familles de vecteurs : $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$ (et $\mathrm{Vect}(A)$), familles libres (et liées), génératrices, bases.
- Vecteurs colinéaires. Critère de liberté pour les familles de (zéro, un ou) deux vecteurs.
- Existence/unicité de l'écriture d'un vecteur comme CL des éléments d'une famille. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\nu)$ dans le cas d'une base finie ν.
- Sous-espaces vectoriels : définition, stabilité par combinaison linéaire.
- Intersection de sous-espaces vectoriels. $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$ comme plus petit sous-espace vectoriel contenant les x_i.
- Notion de famille échelonnée de polynômes. Liberté. Bases échelonnées de K[X] et de $K_n[X]$.
- Somme de sous-espaces vectoriels : définition, $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)+\mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_p) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$.
- Somme directe : définition et reformulations. Notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- Bases adaptées à une décomposition en somme directe.

Questions de cours

- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si tout vecteur de E s'écrit d'au plus une façon comme combinaison linéaire des x_i, $i \in I$.
- L'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- Liberté des familles échelonnées de polynômes.
- Une famille échelonnée au sens fort est une base de K[X].
- Deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe si et seulement si leur intersection est réduite à l'espace nul.
- Si F_1 et F_2 sont en somme directe, la concaténation d'une base de chacun fournit une base de $F_1 \oplus F_2$.
- Si $(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ est une base de E, $E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_r) \oplus \mathrm{Vect}(x_{r+1}, \dots, x_n)$.